Sur la complexité de l'ensemble Indépendant Dominant avec des Obligations faibles dans les graphes

Timothée Martinod

Université Clermont Auvergne, CNRS, Mines de Saint-Étienne, Clermont Auvergne INP, LIMOS, 63000 Clermont-Ferrand, France

timothee.martinod@uca.fr

Mots-clés : *complexité, graphe, domination, obligation.*

Problématique. Un sous-ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble *dominant indépendant* (ou *stable*) d'un graphe $G = (V, E)$ si D est un ensemble indépendant (il n'existe aucune arête entre les sommets de D) et dominant tous les sommets de G (chaque sommet de $V - D$ a un voisin dans D). Le problème de l'ensemble Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) en propose une généralisation. Une instance est un graphe $G = (V, E)$ et une partition $\Pi = (V_1, \ldots, V_k)$ des sommets de V. Chaque sous-ensemble V_i de Π est appelé une *obligation* (ou *obligation forte*). Un ensemble Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) D dans une instance (G, Π) est un ensemble dominant indépendant de G avec la contrainte supplémentaire que si un sommet u d'une obligation V_i appartient à D, alors *tous* les autres sommets de V_i doivent aussi appartenir à D : pour chaque $i = 1, \ldots, k$, soit $V_i \cap D = \emptyset$ soit $V_i \subseteq D$ (l'ensemble D *respecte* les obligations Π). Nous étudions une généralisation de cette notion d'obligation. Une instance de notre problème est un graphe $G = (V, E)$, des obligations $\Pi = (V_1, \ldots, V_k)$ sur les sommets de V et un seuil $\kappa \geq 0$. Lorsque $\kappa > 0$, les obligations sont dites *faibles*. Un ensemble Indépendant Dominant avec Obligations faibles (*IDOf*) D dans une instance (G, Π, κ) est un ensemble dominant indépendant de G pour lequel nous relâchons partiellement la contrainte portée par les obligations : seulement si *plus de* κ sommets d'une obligation V_i appartiennent à D, alors tous les autres sommets de V_i doivent aussi appartenir à D : pour chaque $i = 1, \ldots, k$, soit $|V_i \cap D| \leq \kappa$ soit $V_i \subseteq D$ (l'ensemble D *respecte* les obligations faibles Π). Le problème de décider si une instance (G, Π, κ) contient un *IDOf* sera nommé *problème IDOf.* N.B. : si κ vaut zéro, un *IDOf* est simplement un *IDO*.

Contexte. L'étude de problèmes de graphes classiques avec des contraintes supplémentaires est ancienne. Récemment, le concept de "conflit" a été introduit. Il consiste à ajouter à un graphe $G = (V, E)$, un ensemble de paires d'éléments de G (sommets ou arêtes) qui ne peuvent *pas* appartenir à une même solution (une solution peut être un chemin, un arbre, un ensemble dominant, etc. selon l'objectif). Contrairement aux obligations, un conflit exprime l'interdiction d'utiliser simultanément deux éléments d'un système, souvent en raison d'une incompatibilité entre eux. La plupart des problèmes avec conflits se révèlent difficiles. Voici quelques publications récentes sur le sujet : [1, 2, 4, 5, 8].

La première apparition de la notion d'obligation remonte à [3]. Cette notion s'avère utile pour représenter des contextes où les éléments doivent être mobilisés de manière collective plutôt qu'individuelle (comme une équipe de personnes ou un ensemble de ressources). Dans un article récent sur des problèmes de tournées [6], les obligations modélisent des situations où plusieurs routes existent, mais l'une d'entre elles doit obligatoirement être empruntée (en cas de "panneau d'obligation de tourner à droite" par exemple). Elles sont formées par la succession de deux arcs ou arêtes. Dans [7], les obligations sont formées par des groupes de sommets devant appartenir aux mêmes solutions du problème de l'Indépendant Dominant. Les auteurs ont montré que décider de l'existence d'un *IDO* est un problème $\mathcal{NP}$-complet même dans un chemin ou un graphe de diamètre trois avec des obligations stables de même taille $\lambda > 1$.

Ils ont également montré que décider de l'existence d'un ensemble indépendant, dominant au moins $3\sqrt{|V|}-2$ sommets et respectant les obligations est un problème $\mathcal{NP}$-complet même si le graphe est une collection de chemins et que les obligations sont stables. Ils ont ainsi étudié le rôle de la domination dans la difficulté du problème. Nous relâchons ici la restriction portant sur les obligations en étudiant des instances composées d'obligations faibles.

Résultats.

Soit λ la taille de la plus grande obligation. Nous montrons que lorsque $\kappa = \lambda - 1$ le problème *IDOf* est polynomial quelle que que soit la topologie du graphe. S'il existe une constante λ telle que pour chaque $i = 1, \ldots, k$, $|V_i| = \lambda$ alors nous disons que les obligations sont λ-équilibrées. Nous prouvons que le problème *IDOf* est $\mathcal{NP}$-complet dans différents cas, selon la topologie du graphe, le seuil choisi et la présence d'obligations fortes. Dans la suite, un *chemin* est un graphe connexe dans lequel chaque sommet a exactement deux voisins, sauf deux extrémités qui en ont un seul. Un graphe est une *collection de chemins disjoints* s'il est seulement composé de chemins qui sont sommet-disjoints par paire (c'est-à-dire s'il s'agit d'une forêt de chemins). Un graphe est *dense* s'il contient au moins 90% des arêtes possibles entre ses sommets. Un graphe est un *arbre* s'il est connexe et sans cycle. Un *graphe de bloc* est un graphe dans lequel chaque composante biconnexe est une clique. La plupart des problèmes algorithmiques sont triviaux ou faciles à résoudre dans les chemins et les arbres. Cependant, nous montrons que si l'instance contient des obligations fortes alors le problème *IDOf* est $\mathcal{NP}$-complet, même si G est un chemin ou si G est un graphe dense pour toute répartition des obligations λ-équilibrées faibles et fortes. Dans le cas où toutes les obligations sont faibles, nous montrons que le problème *IDOf* est $\mathcal{NP}$-complet pour tout seuil $\kappa \geq 1$ dans les collections de chemins avec des obligations λ-équilibrées et dans les graphes de blocs connexes associés à des obligations non stables et non-équilibrées. Finalement, nous prouvons que le problème *IDOf* est $\mathcal{NP}$-complet dans les arbres avec des obligations faibles stables pour $\kappa = 1$.

Références

[1] Alexis Cornet and Christian Laforest. Total domination, connected vertex cover and steiner tree with conflicts. *Discret. Math. Theor. Comput. Sci.*, 19(3), 2017.

[2] Alexis Cornet and Christian Laforest. Domination problems with no conflicts. *Discret. Appl. Math.*, 244 :78–88, 2018.

[3] Alexis Cornet and Christian Laforest. Graph problems with obligations. In *Combinatorial Optimization and Applications*, volume (LNCS) 11346, pages 183–197, Cham, 2018. Springer International Publishing.

[4] Mamadou Moustapha Kanté, Christian Laforest, and Benjamin Momège. Trees in graphs with conflict edges or forbidden transitions. In *Theory and Applications of Models of Computation, 10th International Conference, TAMC 2013. Proceedings*, volume 7876 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 343–354. Springer, 2013.

[5] Mamadou Moustapha Kanté, Fatima Zahra Moataz, Benjamin Momège, and Nicolas Nisse. Finding paths in grids with forbidden transitions. In *41st International Workshop, WG 2015*, volume 9224 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 154–168. Springer, 2015.

[6] Christian Laforest and Timothée Martinod. Introduction to routing problems with mandatory transitions. In Leszek Gąsieniec, editor, *SOFSEM 2023 : Theory and Practice of Computer Science*, pages 254–266, Cham, 2023. Springer International Publishing.

[7] Christian Laforest and Timothée Martinod. On the complexity of independent dominating set with obligations in graphs. *Theoretical Computer Science*, 904 :1–14, 2022.

[8] Christian Laforest and Benjamin Momège. Nash-williams-type and chvátal-type conditions in one-conflict graphs. In *SOFSEM 2015 Proceedings*, volume 8939 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 327–338. Springer, 2015.