Problèmes d'optimisation avec un objectif linéaire évidentiel

Tuan-Anh Vu[1], Sohaib Afifi[1], Éric Lefèvre[1], Frédéric Pichon[1]

Univ. Artois, UR 3926, Laboratoire de Génie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A), F-62400 Béthune, France

{tanh.vu, prénom.nom}@univ-artois.fr

Mots-clés : *Fonctions de croyance, Optimisation robuste, Optimisation combinatoire, Programmation linéaire.*

1 Introduction

Ce travail [1] se focalise sur un problème d'optimisation avec un objectif linéaire (LOP) :

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &\text{t.q. } x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{Z}^{n_1}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_2}_{\geq 0} \text{ avec } n_1 + n_2 = n. \end{aligned} \tag{LOP}$$

Considérons le cas où le vecteur c de l'objectif est incertain et laissons $\Omega \in \mathbb{R}^n$ être un ensemble fermé qui consiste en toutes les valeurs possibles de c. En outre, la connaissance partielle de la vraie valeur (inconnue) de c est représentée par une fonction $m : \mathcal{C} \mapsto [0, 1]$ appelée fonction de masse [2], où $\mathcal{C}$ est supposé être un ensemble fini de sous-ensembles fermés de Ω, tel que $\sum_{A \in \mathcal{C}} m(A) = 1$ et $m(\emptyset) = 0$. La masse $m(A)$ quantifie la croyance allouée sur le fait de savoir *seulement* que $c \in A$. Un sous-ensemble $A \subseteq \Omega$ est appelé un ensemble focal de m si $m(A) > 0$. L'ensemble de tous les ensembles focaux de m est noté $\mathcal{F}$. Nous appelons cette incertitude sur c *évidentielle*.

Dans cet article, nous supposons que chaque ensemble focal $F_r \in \mathcal{F}$ de m est un produit cartésien d'ensembles compacts, c'est-à-dire, $F_r = \times_{i=1}^n F_r^{\downarrow i}$, $\forall r \in \{1, \ldots, K\}$. De plus, les valeurs minimale et maximale de $F_r^{\downarrow i}$ sont désignées par l_i^r et u_i^r, respectivement.

Une telle fonction de masse est une généralisation directe et naturelle de la représentation par intervalles trouvée dans l'optimisation robuste et peut être illustrée comme suit : Dans un réseau de trois villes, A, B et C, par beau temps, il faut de 20 à 30 minutes pour aller de A à B et de 10 à 20 minutes pour aller de B à C. Cependant, par mauvais temps, le temps de trajet de A à B (resp. B à C) est de 30 à 40 minutes (resp. 15 à 25 minutes) et les prévisions indiquent que la probabilité de beau temps (resp. de mauvais temps) est de 0.8 (resp. 0.2).

La fonction de masse m induit une fonction de croyance Bel et une fonction de plausibilité Pl définies sur l'ensemble des boréliens de Ω, noté $\mathcal{B}(\Omega)$:

$$Bel(A) = \sum_{B \in \mathcal{F}: B \subseteq A} m(B), \ Pl(A) = \sum_{B \in \mathcal{F}: B \cap A \neq \emptyset} m(B).$$

Une mesure de probabilité P sur $\mathcal{B}(\Omega)$ est compatible avec m si $Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A)\ \forall A \in \mathcal{B}(\Omega)$. On désigne par $\mathcal{P}(m)$ l'ensemble de toutes les mesures de probabilité qui sont compatibles avec m. Un résultat bien connu [4, Section 2.3] indique que toute mesure de probabilité dans $\mathcal{P}(m)$ peut être obtenue d'une manière spécifique.

Notons que chaque solution $x \in \mathcal{X}$ peut être considérée comme un acte $x : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que $x(c) = \sum_{i=1}^n x_i c_i$. Ensuite, la *valeur espérée supérieure* $\overline{E}_m(x)$ et *valeur espérée inférieure* $\underline{E}_m(x)$ de x, par rapport à m, sont définies comme suit :

$$\overline{E}_m(x) := \sup_{P \in \mathcal{P}(m)} E_P(x), \quad \underline{E}_m(x) := \inf_{P \in \mathcal{P}(m)} E_P(x).$$

1. Ce résumé est une synthèse de notre article [3] publié récemment.

Nous montrons que $\overline{E}(x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i x_i$, $\underline{E}(x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{l}_i x_i$, avec $\bar{u}_i := \sum_{r=1}^{K} m(F_r) u_i^r$ et $\bar{l}_i := \sum_{r=1}^{K} m(F_r) l_i^r$, $i = 1, \ldots, n$.

2 Résultats

Avec les critères de prise de décision sous incertitude évidentielle [1], les solutions sont comparées comme suit :

— Critère de Hurwicz généralisé : $x \succeq_{hu}^{\alpha} y$ si $\alpha \overline{E}_m(x) + (1-\alpha)\underline{E}_m(x) \geq \alpha \overline{E}_m(y) + (1-\alpha)\underline{E}_m(y)$, pour un certain $\alpha \in [0,1]$.

— Critère de dominance forte : $x \succeq_{str} y$ si $\underline{E}_m(x) \geq \overline{E}_m(y)$.

— Critère de dominance faible : $x \succeq_{weak} y$ si $\overline{E}_m(x) \geq \overline{E}_m(y)$ et $\underline{E}_m(x) \geq \underline{E}_m(y)$.

— Critère de maximalité : $x \succeq_{max} y$ si $\underline{E}_m(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow \forall P \in \mathcal{P}(m), E_P(x) \geq E_P(y)$.

— Critère de E-admissibilité : x est E-admissible si $\exists P \in \mathcal{P}(m)$ tel que $E_P(x) \geq E_P(y) \ \ \forall y$.

Pour chaque critère $\succeq_{cr} \in \{\succeq_{hu}^{\alpha}, \succeq_{str}, \succeq_{weak}, \succeq_{max}, \succeq_{adm}\}$, l'ensemble des solutions non dominées (les meilleures) est défini comme $Opt_{cr} = \{x : \nexists y \text{ tel que } y \succ_{cr} x\}$.

Nous rappelons une définition qui apparaît dans de nombreux travaux sur les optimisations à regret minimax avec des données d'intervalle.

Définition 1 *Une solution x est une solution possiblement optimale du Problème LOP par rapport à l'ensemble $\mathcal{C} := \times_{i=1}^{n} [\bar{l}_i, \bar{u}_i]$ si x est une solution optimale pour au moins un certain c dans $\mathcal{C}$. L'ensemble de ces solutions possiblement optimales est noté $Opt_{pos}^{\mathcal{C}}$.*

Enfin, nous caractérisons les solutions non dominées par des concepts établis dans le domaine de l'optimisation.

— Pour tout problème de type LOP,
  — Les solutions dans Opt_{hu}^{α} sont caractérisées en termes de solutions optimales de LOP avec des coefficients $c_i = \alpha \bar{u}_i + (1-\alpha)\bar{l}_i$.
  — Les solutions dans Opt_{str} sont caractérisées en termes de solutions d'un *problème de faisabilité avec borne inférieure* associé à LOP.
  — Les solutions dans Opt_{weak} sont caractérisées en termes de solutions *efficientes* d'un bi-objectif LOP, où chaque c_i a deux poids $\bar{u}_i, \bar{l}_i$.
  — $Opt_{adm} \subseteq Opt_{pos}^{\mathcal{C}} \subseteq Opt_{max}$.

— En plus,
  — Si le problème LOP est une programmation linéaire en nombres entiers mixtes, $Opt_{adm} = Opt_{pos}^{\mathcal{C}}$ et, en général, $Opt_{pos}^{\mathcal{C}} \subset Opt_{max}$.
  — Si le problème LOP est convexe ou combinatoire ($\mathcal{X} \subseteq \{0,1\}^n$), $Opt_{adm} = Opt_{pos}^{\mathcal{C}} = Opt_{max}$.

Ces caractérisations permettent de trouver des solutions non dominées en résolvant des variantes connues de la version déterministe du problème ou même, dans certains cas, en résolvant simplement la version déterministe. En outre, dans le cas des problèmes d'optimisation combinatoire, notre résultat pour la E-admissibilité est particulièrement précieux : nous montrons que si le problème déterministe peut être résolu efficacement (par exemple, le problème du plus court chemin), la vérification de la E-admissibilité est également efficace.

Références

[1] Thierry Denoeux. Decision-making with belief functions : a review. *Int. J. Approx. Reason.*, 109 :87–110, 2019.

[2] Glenn Shafer. *A mathematical theory of evidence.* Princeton university press, 1976.

[3] Tuan-Anh Vu, Sohaib Afifi, Eric Lefèvre and Frédéric Pichon. Optimization problems with evidential linear objective. *Int. J. Approx. Reason.*, 161 :108987, 2023.

[4] Larry A. Wasserman. Belief functions and statistical inference. *Can. J. Stat.*, 18 :183–196, 1990.