Integration des décompositions de Dantzig-Wolfe et de Fenchel via une normalisation directionelle

Francois Lamothe[1], Alain Haït[1], Emmanuel Rachelson[1] Claudio Contardo[2]
Bernard Gendron[3]

[1] ISAE-Supaéro, DISC, Toulouse, France
{francois.lamothe, alain.hait, emmanuel.rachelson}@isae.fr
[2] Concordia University, Montréal, Canada
claudio.contardo@concordia.ca
[3] Université de Montréal, Montréal, Canada

Mots-clés : *Décomposition de Dantzig-Wolfe, décomposition de Fenchel, séparation de polyèdres*

Parmi les méthodes de résolutions des programmes linéaires en nombres entiers, la méthode de *Branch and Bound* [Land and Doig, 1960] est peut-être la plus efficace et la plus polyvalente. Elle repose sur le calcul de bornes primales via des heuristiques et de bornes duales via la résolution de relaxations du problème. La relaxation la plus classique est la *relaxation linéaire* dans laquelle les contraintes d'intégralité des variables sont ignorées.

Une pratique courante pour améliorer la relaxation linéaire des programmes linéaires à nombres entiers mixtes consiste à appliquer une méthode de décomposition à un sous-ensemble de contraintes du problème dont le polyèdre associé n'a pas la propriété d'intégralité (certains sommets du polyèdre ont des composantes non entières). La décomposition resserre le polyèdre, ce qui à son tour renforce la relaxation linéaire du problème. L'une des méthodes de décomposition les plus classiques est la décomposition de Dantzig and Wolfe [1960]. Celle-ci procède par construction d'une approximation interne du polyèdre à décomposer. Une autre décomposition moins connues est la décomposition de Fenchel [Boyd, 1990] qui construit elle une approximation externe du polyèdre.

Bien que les décompositions de Fenchel et Dantzig-Wolfe aient été largement étudiées dans le contexte du renforcement de la relaxation linéaire, plusieurs limitations des deux méthodes de décomposition ont été identifiées dans la littérature pouvant affecter leur convergence. En particulier, la décomposition de Dantzig-Wolfe est connue pour souffrir de la dégénérescence de son problème maître (ce qui se produit lorsque le problème maître admet plusieurs solutions duales optimales). Ceci explique pourquoi un effort considérable a été fait par la communauté scientifique pour améliorer ces méthodes de décomposition et pallier leurs faiblesses. Ce travail s'inscrit dans cette ligne de contribution. Nous montrons que les décompositions de Dantzig-Wolfe et Fenchel peuvent être vues sous un angle commun de construction d'approximations internes et externes du polyèdre en cours de décomposition et que la synergie entre les deux approximations peut être bénéfique pour l'ensemble de l'approche. La présentation contiendra les éléments suivant :

— Nous fournissons des interprétations géométriques des décompositions de Dantzig-Wolfe et Fenchel qui peuvent alimenter des informations complémentaires sur ces deux approches par rapport aux interprétations purement analytiques.

— Nous introduisons une nouvelle méthode de décomposition inspirée à la fois des décompositions de Dantzig-Wolfe et de Fenchel. La méthode proposée utilise un problème maître de Dantzig-Wolfe et un problème maître de Fenchel. Un sous-problème de Fenchel guidé par une normalisation directionnelle est utilisé pour coordonner les deux problèmes maîtres. La méthode résultante s'avère particulièrement efficace sur les instances présentant des degrés élevés de dégénérescence. Nous proposons une explication possible de ce phénomène sur la base de nos résultats.

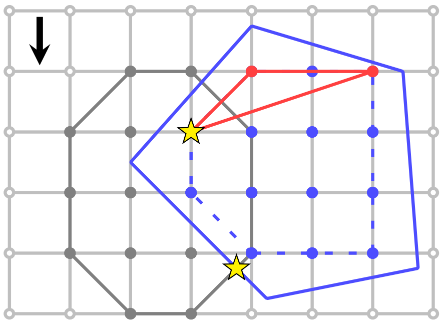
Du fait d'un manque de place pour introduire une méthode de décomposition proprement nous donnons un bref aperçu de celle ci à l'aide de quelques notations et d'une figure. Le programme linéaire en nombre entier à résoudre est le suivant :

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \max_{x} \; cx && \text{(1a)}\\
& \text{s.c.} \quad A_1 x \leqslant b_1 && \text{(1b)}\\
& \qquad\;\; A_2 x \leqslant b_2 && \text{(1c)}\\
& \qquad\;\; x \in \mathbb{Z}^n && \text{(1d)}
\end{aligned}
$$

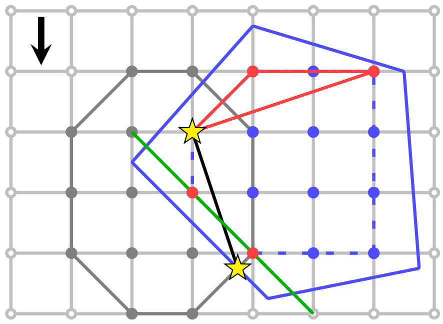
Considérons les ensembles suivants :

$$
\begin{aligned}
LR_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n | A_1 x \leqslant b_1\}\\
LR_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n | A_2 x \leqslant b_2\}\\
Q_2 &= conv(\{x \in \mathbb{Z}^n | A_2 x \leqslant b_2\})
\end{aligned}
$$

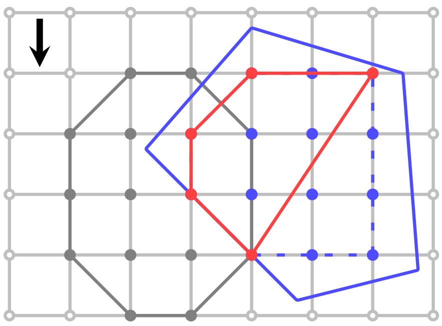
La relaxation linéaire du problème (P) consiste à optimiser cx sur l'ensemble $LR_1 \cap LR_2$. L'objectif de la méthode est d'obtenir une meilleure relaxation en optimisant sur $LR_1 \cap Q_2$. Pour ce faire, des approximations interne et externe de Q_2 seront créées et notée $\widehat{Q}_2$ et $\breve{Q}_2$. Les résultats de l'optimisation de cx sur $LR_1 \cap \widehat{Q}_2$ et $LR_1 \cap \breve{Q}_2$ seront notées $\widehat{x}$ et $\breve{x}$.



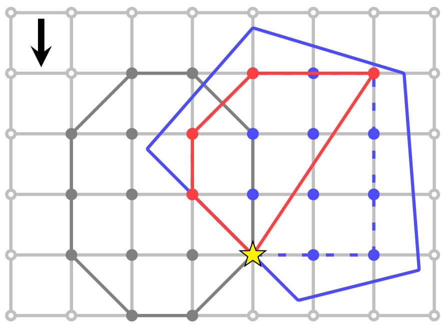
(a) Initialisation de l'approximation externe $\breve{Q}_2$ (bleu plein) et de l'approximation interne $\widehat{Q}_2$ (rouge). Les solutions $\breve{x}$ et $\widehat{x}$ (étoiles) sont calculées en optimisant cx (flèche noire) sur l'intersection de LR_1 (gris) et de l'approximation correspondante.



(b) Le point $\breve{x}$ est séparée de Q_2 (bleu pointillé) à l'aide de la facette de Q_2 coupant le segment reliant $\breve{x}$ à $\widehat{x}$. Ce problème de séparation renvoie une coupe (vert) ainsi qu'un ensemble de sommets (rouge) de Q_2.



(c) La coupe est ajoutée à l'approximation externe $\breve{Q}_2$ tandis que les sommets sont rajoutés à l'approximation interne $\widehat{Q}_2$. De nouvelles solutions $\breve{x}$ et $\widehat{x}$ peuvent être calculée.



(d) Le processus reprend à l'étape (b) jusqu'à ce que la valeur des solutions renvoyée par les deux approximations coïncident. A ce moment la méthode s'arrête.

FIG. 1 Illustration de la décomposition de Dantzig-Wolfe-Fenchel

Références

E Andrew Boyd. The lagrangian and other primal cutting planes for linear integer programming problems. Technical report, 1990.

George B Dantzig and Philip Wolfe. Decomposition principle for linear programs. *Operations research*, 8(1) :101–111, 1960. doi : 10.1287/opre.8.1.101.

AH Land and AG Doig. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28(3) :497–520, 1960. doi : 10.1007/978-3-540-68279-0_5.