SUR L'INCOMPATIBILITÉ DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS RELATIONNELLES FLOUES

Ismaïl Baaj
Univ. Artois, CNRS, CRIL, F-62300 Lens, France
baaj@cril.fr

De nombreux auteurs ont souligné la pertinence des équations relationnelles floues pour certaines applications d'Intelligence Artificielle (IA) [8, 11, 12, 13]. L'émergence de ces applications a été rendue possible par les travaux pionniers de Sanchez sur la résolution d'un système d'équations relationnelles floues de type $\max - \min$ [18]. Sanchez a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système d'équations relationnelles floues de type $\max - \min$ soit compatible, c'est-à-dire qu'il ait des solutions.

Cependant, l'incompatibilité de ces systèmes reste un problème difficile à résoudre [8, 12, 15, 16]. De nombreux auteurs ont abordé la question de la recherche de solutions approximatives [9, 12, 15, 16, 20]. Parmi ces travaux, une idée pionnière a été introduite par Pedrycz dans [16]. Étant donné un système incompatible, Pedrycz propose de modifier de façon minimale son second membre pour le rendre compatible. Cuninghame-Green et Cechlárová [9] et Li et Fang [15] ont chacun proposé un algorithme pour calculer la distance minimale $\Delta = \inf_{c\in\mathcal{C}} \|b - c\|$, exprimée avec la norme L_∞, où b est le second membre d'un système d'équations relationnelles floues de type $\max - \min$ et $\mathcal{C}$ est l'ensemble des seconds membres des systèmes compatibles définis avec la même matrice : celle du système incompatible. Cette distance minimale est appelée distance de Tchebyshev associée au second membre d'un système incompatible. Tous les travaux mentionnés ci-dessus (et d'autres) ne permettent d'obtenir qu'une valeur approchée de la distance de Tchebyshev.

Dans les travaux [2, 3, 4, 5], nous étudions l'incompatibilité de deux classes de systèmes d'équations relationnelles floues: les systèmes de type $\max -T$ et les systèmes de type $\min - \rightarrow$, où T est une t-norme parmi le minimum, le produit et celle de Łukasiewicz et $\rightarrow$ est l'implicateur résiduel associé à une t-norme T (respectivement l'implication de Gödel, de Goguen ou celle de Łukasiewicz). Les deux opérateurs de composition sous-jacents à ces deux classes sont notés $\Box_T^{\max}$ et $\Box_{\mathcal{I}_T}^{\min}$: le produit matriciel $\Box_T^{\max}$ utilise T pour le produit et $\max$ pour l'addition et le produit matriciel $\Box_{\rightarrow}^{\min}$ utilise l'implicateur résiduel $\rightarrow$ associé à T pour le produit et $\min$ pour l'addition.

Plus analytiquement, les deux classes de systèmes étudiées sont définies de la façon suivante :

Un système d'équations relationnelles floues de type $\max -T$ est de la forme (S) : $A\Box_T^{\max}x = b$ où:

- $A = [0,1]^{n\times m}$ est une matrice, $b = [0,1]^{n\times 1}$ son second membre et $x \in [0,1]^{m\times 1}$ le vecteur inconnu,
- T est une t-norme parmi le minimum, le produit et celle de Łukasiewicz,

Un système d'équations relationnelles floues de type $\min - \rightarrow$ est de la forme (Σ) : $\Gamma\Box_{\rightarrow}^{\min}x = \beta$ où:

- $\Gamma = [0,1]^{m\times n}$ est une matrice, $\beta = [0,1]^{m\times 1}$ son second membre et $x \in [0,1]^{n\times 1}$ le vecteur inconnu,
- $\rightarrow$ est l'implicateur résiduel associé à la t-norme T considérée (l'implication de Gödel, de Goguen ou celle de Łukasiewicz, respectivement).

Pour les systèmes de chacune des deux classes, nous donnons une formule analytique pour calculer la distance de Tchebyshev associée à son second membre, en fonction des coefficients de la matrice et du second membre du système.

• Pour un système (S) : $A\Box_T^{\max}x = b$ de type $\max -T$, la distance de Tchebyshev associée à b est notée :

$$\Delta = \Delta(A,b) = \inf_{c\in\mathcal{C}} \|b-c\| \text{ où } \|b-c\| = \max_{1\le i\le n} \mid b_i - c_i \mid \text{ et } \mathcal{C} = \{c = [c_i] \in [0,1]^{n\times 1} \mid A\Box_T^{\max}x = c \text{ est compatible}\}$$

• Pour un système (Σ) : $\Gamma\Box_{\rightarrow}^{\min}x = \beta$ de type $\min - \rightarrow$, la distance de Tchebyshev associée à β est notée :

$$\nabla = \nabla(\Gamma,\beta) = \inf_{d\in\mathcal{D}} \|\beta-d\| \text{ où } \|\beta-d\| = \max_{1\le j\le m} \mid b_j - d_j \mid \text{ et } \mathcal{D} = \{d = [d_j] \in [0,1]^{m\times 1} \mid \Gamma\Box_{\rightarrow}^{\min}x = d \text{ est compatible}\}$$

Formules explicites pour Δ et ∇ et applications

Les preuves des formules de Δ et ∇ reposent sur la résolution d'inéquations vectorielles associées à chaque système :

♦ Pour un système (S) : $A\Box_T^{\max}x = b$ de type $\max -T$, on établit :

$$\Delta = \inf\{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta) \le F(\bar{b}(\delta))\}. \tag{1}$$

où $\overline{b}(\delta) = [\min(b_i + \delta, 1)]_{1\le i\le n}$, $\underline{b}(\delta) = [\max(b_i - \delta, 0)]_{1\le i\le n}$ et l'application F est definie par :

$$F : [0,1]^{n\times 1} \longrightarrow [0,1]^{n\times 1} : c \mapsto A\Box_T^{\max}(A^t\Box_{\mathcal{I}_T}^{\min} c) : c = [c_i] \mapsto F(c) = [F(c)_i]$$

Notons que (1) généralise aux cas des deux t-normes produit et celle Łukasiewicz, un résultat fondamental de Cuninghame-Green et Cechlárová pour la t-norme *min* [9]. Dans [2], il est montré que les trois formules pour calculer Δ pour les systèmes de type $\max -T$ ont une expression canonique unique qui est :

$$\Delta = \max_{1\le i\le n} \delta_i \quad \text{avec} \quad \delta_i = \min_{1\le j\le m} \max_{1\le k\le n} \delta_{ijk}^T \quad \text{et} \quad \delta_{ijk}^T = \begin{cases} \max[(b_i - a_{ij})^+,\ \sigma_G(b_i, a_{kj}, b_k)] & \text{si } T = T_M \text{ (min)} \\ \sigma_{GG}(a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k) & \text{si } T = T_P \text{ (product)} \\ \sigma_L(1 - a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k) & \text{si } T = T_P \text{ (Łukasiewicz)} \end{cases}.$$

(Les fonctions σ_G, σ_{GG} et σ_L sont introduites dans [3, 5]). Les trois formules nous permettent d'établir les résultats suivants :

- La plus grande approximation de Tchebyshev du second membre b du système (S) est $F(\overline{b}(\Delta))$ [3, 5]. Il en résulte qu'on a $\Delta = \min_{c\in\mathcal{C}} \|b - c\|$ et nous avons l'équivalence suivante : $\Delta = 0 \Longleftrightarrow$ le système (S) est compatible.
- Le vecteur $e = A^t\Box_{\mathcal{I}_T}^{\min}\overline{b}(\Delta)$ est la plus grande solution approchée du système incompatible (S) [3, 5] (c'est également la plus grande solution du système $A\Box_T^{\max}x = F(\overline{b}(\Delta))$). Dans le cas $\max - \min$, nous avons donné, dans [5], la structure de l'ensemble des solutions approchées du système incompatible (S) et celle de l'ensemble des approximations de Tchebyshev de son second membre b,
- Dans [2], nous avons obtenu pour tout système incompatible (S), un sous-système compatible maximal. Ce sous-système compatible est composé des équations dont les indices sont dans l'ensemble $N_c = \left\{ i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \delta_i = 0 \right\}$. Dans le cas de la composition max-min, nous donnons aussi une méthode pour obtenir efficacement tous les sous-systèmes compatibles maximaux d'un système incompatible (S).

♦ Pour un système $(\Sigma) : \Gamma\Box_{\rightarrow}^{\min}x = \beta$ de type $\min - \rightarrow$, on établit :

$$\nabla = \inf\{\delta \in [0,1] \mid G(\underline{\beta}(\delta) \le \overline{\beta}(\delta))\}.$$

où l'application G est definie par :

$$G : [0,1]^{m\times 1} \longrightarrow [0,1]^{m\times 1} : d \mapsto \Gamma\Box_{\mathcal{I}_T}^{\min}(\Gamma^t\Box_T^{\max} d) : d = [d_j] \mapsto G(d) = [G(d)_j]$$

Dans [4], il est montré que les trois formules pour calculer ∇ pour les systèmes de type $\min - \rightarrow$ ont une expression canonique unique qui est :

$$\nabla = \max_{1\le j\le m} \nabla_j \quad \text{avec} \quad \nabla_j = \min(1 - \beta_j, \tau_j) \quad \text{et} \quad \tau_j = \min_{i\in\mathcal{A}_j} \max(\theta_{ji}, \zeta_{ji})$$

où $\Gamma = [\gamma_{ji}]_{1\le j\le m, 1\le i\le n}$ et $\mathcal{A}_j = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \gamma_{ji} > 0\}$ et θ_{ji}, ζ_{ji} sont calculés explicitement en fonction des coefficients de Γ et de β. Les trois formules nous permettent d'établir dans [4] les résultats suivants :

- Si $\rightarrow$ est l'implication de Goguen ou celle de Łukasiewicz (associées à la t-norme produit et celle de Łukasiewicz), $G(\underline{\beta}(\nabla))$ est la plus petite approximation de Tchebyshev du second membre β du système (Σ). Il en résulte qu'on a $\nabla = \min_{d\in\mathcal{D}} \|\beta - d\|$ et nous avons l'équivalence : $\nabla = 0 \Longleftrightarrow$ le système (Σ) est compatible.
- le vecteur $\xi = \Gamma^t\Box_T^{\max}\overline{\beta}(\nabla)$ est la plus petite solution approchée du système incompatible (Σ) (c'est également la plus petite solution du système $\Gamma\Box_{\mathcal{I}_T}^{\min}x = G(\underline{\beta}(\nabla))$).
- Le cas de la composition $\min - \rightarrow$ où $\rightarrow$ est l'implication de Gödel (associée à la t-norme $\min$) est plus compliqué : l'ensemble des approximations de Tchebyshev du second membre β peut être vide (∇ n'est pas un minimum). Par l'introduction d'une constante numérique calculée en fonction des coefficients de Γ et du second membre β, nous avons caractérisé le cas où les résultats ci-dessus restent valides pour l'implication de Gödel.

Tous ces travaux [2, 3, 4, 5] peuvent être utiles pour résoudre les problèmes d'incompatibilité des systèmes d'équations relationnelles floues intervenant dans l'apprentissage (e.g. les mémoires associatives dans [19]). Dans l'article [5], pour les systèmes basés sur la composition $\min - \max$, nous donnons les résultats correspondants à ceux obtenus avec la composition $\max - \min$ et nous les appliquons pour l'apprentissage de paramètres de règles possibilistes pour un système à base de règles possibilistes [1, 7]. Ces travaux peuvent être également utiles pour trouver des inverses approchés de matrices floues (besoin mis en avant dans [20] pour de nombreuses applications pratiques), où pour des applications basées sur les systèmes $\max -T$, e.g. analyse spatiale [10], problème de diagnostic [13].

En perspectives, pour utiliser les intégrales de Sugeno, nous étudions actuellement la détermination d'une capacité à partir de données d'apprentissage. De nombreux auteurs se sont intéressés à ce problème e.g. [6, 14, 17], et nous montrons, dans cette présentation, que cela peut être abordé en utilisant un système d'équations relationnelles floues compatible associé aux données dont l'ensemble de solutions nous permet de *déduire* une capacité.

References

[1] Ismaïl Baaj. Learning rule parameters of possibilistic rule-based system. In *2022 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–8. IEEE, 2022.

[2] Ismaïl Baaj. Maximal Consistent Subsystems of Max-T Fuzzy Relational Equations. *arXiv e-prints*, art. arXiv:2311.03059, November 2023. doi:10.48550/arXiv.2311.03059.

[3] Ismaïl Baaj. Chebyshev distances associated to the second members of systems of Max-product/Lukasiewicz Fuzzy relational equations. *arXiv e-prints*, art. arXiv:2302.08554, January 2023. doi:10.48550/arXiv.2302.08554.

[4] Ismaïl Baaj. Handling the inconsistency of systems of $\min \rightarrow$ fuzzy relational equations. *arXiv e-prints*, art. arXiv:2308.12385, August 2023. doi:10.48550/arXiv.2308.12385.

[5] Ismaïl Baaj. Max-min Learning of Approximate Weight Matrices from Fuzzy Data. *arXiv e-prints*, art. arXiv:2301.06141, January 2023. doi:10.48550/arXiv.2301.06141.

[6] Ismaïl Baaj and Agnès Rico. Qualitative integrals with gödel's implication and conjunction: elicitation and if-then rules extraction. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE 2022, Padua, Italy, July 18-23, 2022*, pages 1–8. IEEE, 2022.

[7] Ismaïl Baaj, Jean-Philippe Poli, Wassila Ouerdane, and Nicolas Maudet. Min-max inference for possibilistic rule-based system. In *2021 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–6. IEEE, 2021.

[8] Bernard De Baets. Analytical solution methods for fuzzy relational equations. In *Fundamentals of Fuzzy Sets*, pages 291–340. Springer, 2000.

[9] RA Cuninghame-Green and Katarína Cechlárová. Residuation in fuzzy algebra and some applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 71 (2):227–239, 1995.

[10] Ferdinando Di Martino and Salvatore Sessa. Spatial analysis and fuzzy relation equations. *Advances in Fuzzy Systems*, 2011:6–6, 2011.

[11] Alessandro Di Nola, W Pedrycz, S Sessa, and E Sanchez. Fuzzy relation equations theory as a basis of fuzzy modelling: An overview. *Fuzzy sets and systems*, 40(3):415–429, 1991.

[12] Antonio Di Nola, Elie Sanchez, Witold Pedrycz, and Salvatore Sessa. *Fuzzy relation equations and their applications to knowledge engineering*. Kluwer Academic Publishers, 1989.

[13] Didier Dubois and Henri Prade. Fuzzy relation equations and causal reasoning. *Fuzzy sets and systems*, 75(2):119–134, 1995.

[14] Didier Dubois, Claude Durrieu, Henri Prade, Agnès Rico, and Yannis Ferro. Extracting decision rules from qualitative data using sugeno integral: a case-study. In *European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*, pages 14–24. Springer, 2015.

[15] Pingke Li and Shu-Cherng Fang. Chebyshev approximation of inconsistent fuzzy relational equations with max-t composition. In *Fuzzy Optimization*, pages 109–124. Springer, 2010.

[16] Witold Pedrycz. Inverse problem in fuzzy relational equations. *Fuzzy Sets and systems*, 36(2):277–291, 1990.

[17] Henri Prade, Agnès Rico, Mathieu Serrurier, and Eric Raufaste. Elicitating sugeno integrals: Methodology and a case study. In *European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*, pages 712–723. Springer, 2009.

[18] Elie Sanchez. Resolution of composite fuzzy relation equations. *Information and control*, 30(1):38–48, 1976.

[19] Peter Sussner and Marcos Eduardo Valle. Implicative fuzzy associative memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(6): 793–807, 2006.

[20] Ching-Feng Wen, Yan-Kuen Wu, and Zhaowen Li. Algebraic formulae for solving systems of max-min inverse fuzzy relational equations. *Information Sciences*, 2022. ISSN 0020-0255.