

Reconnaissance des graphes de 2-intersection des hypergraphes 3-uniformes

Niccolò Di Marco¹, Andrea Frosini¹, Christophe Picouleau²

¹ Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Firenze, Firenze, Italy,. Email :
`niccolo.dimarco@unifi.it, andrea.frosini@unifi.it`

² Conservatoire National des Arts et Métiers, laboratoire Cédric Paris (France) :
`christophe.picouleau@cnam.fr`

Mots-clés : *hypergraphe, graphe d'intersection, algorithme polynomial, NP-complet.*

Les problèmes de reconnaissance d'un graphe d'intersection et d'un graphe de 2-intersection d'un hypergraphe 3-uniforme ont été montrés NP-complets. Nous montrons que dans la classe des graphes sans griffe la reconnaissance d'un graphe de 2-intersection d'un hypergraphe 3-uniforme reste un problème NP-complet. Nous montrons un algorithme polynomial pour cette classe lorsque le graphe est triangulé.

1 Introduction

Un hypergraphe $\mathcal{G} = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, est 3-uniforme lorsque chacune de ses hyperarêtes $e \subset V$ contient exactement 3 sommets de V , i.e. $|e| = 3$. Le graphe d'intersection de $\mathcal{G}$ est le graphe $G = (E, F)$ dans lequel ee' est une arête de F si et seulement si $e \cap e' \neq \emptyset$. Pour $1 \leq k \leq 2$ le graphe de k -intersection de $\mathcal{G}$ est défini de manière identique avec $|e \cap e'| = k$.

Le problème de la reconnaissance de graphes de k -intersection d'hypergraphes 3-uniformes consiste, pour un graphe $G = (E, F)$, à décider s'il existe $\mathcal{G}$ un hypergraphe 3-uniforme pour lequel G est le graphe de k -intersection. Lorsque la réponse est positive on cherchera également à construire un tel hypergraphe $\mathcal{G}$.

P. Hliněný et J. Kratochvíl [2] ont montré que la reconnaissance de graphes de 1-intersection d'hypergraphes 3-uniformes est un problème NP-complet. Di Marco et al. [1] ont montré que la reconnaissance de graphes de 2-intersection d'hypergraphes 3-uniformes est un problème NP-complet. Dans cet article ils remarquent que les graphes de 2-intersection d'hypergraphes 3-uniformes ne peuvent pas contenir $K_{1,4}$, l'étoile à quatre feuilles, comme sous-graphe induit.

2 Graphes sans griffe

Le problème de reconnaissance de graphes de 2-intersection d'hypergraphes 3-uniformes ayant été montré NP-complet pour les graphes sans $K_{1,4}$, nous nous intéressons à la sous-classe des graphes sans griffe (la griffe $K_{1,3}$ est l'étoile à trois feuilles). En utilisant une transformation polynomiale d'une variante du problème 3-SAT nous montrons :

Théorème 1 *La reconnaissance de graphes de 2-intersection d'hypergraphes 3-uniformes est un problème NP-complet pour les graphes sans griffe.*

3 Graphes triangulés sans griffe

Un graphe est triangulé si chacun de ses cycles induits est un triangle. Le problème de reconnaissance de graphes de 2-intersection d'hypergraphes 3-uniformes ayant été montré NP-

complet pour les graphes sans griffe, nous nous intéressons à la sous-classe des graphes sans griffe triangulés. Nous montrons :

Théorème 2 *Soit G un graphe sans griffe triangulé. Il existe un algorithme polynomial qui décide si G est le graphe de 2-intersection d'un hypergraphe 3-uniforme $\mathcal{G}$ et construit $\mathcal{G}$ lorsque la réponse est affirmative.*

L'algorithme utilise un graphe d'intersection des cliques de G et une procédure de diffusion d'étiquettes dans ce graphe.

Références

- [1] N. Di Marco, A. Frosini, W. Kocay, E. Pergola and L. Tarsissi *Structure and Complexity of 2-Intersection Graphs of 3-Hypergraphs*, *Algorithmica* 85 (2023), 745-761.
- [2] P. Hliněný and J. Kratochvíl *Computational complexity of the Krausz dimension of graphs*, *Lect. Notes in Comput. Sci.* 1335 (1997), 214-228.