Décomposition de Dantzig-Wolfe sur un modèle par consensus : Renforcement de la relaxation et Contraintes BlackBox

Pierre Bauguion, Jérémie Leguay, Youcef Magnouche, Sébastien Martin

Huawei Technologies France, Boulogne-Billancourt, France.

{pierre.bauguion, jeremie.leguay, youcef.magnouche,sebastien.martin}@huawei.com

Mots-clés : *programmation linéaire en nombres entiers, formulation étendue, décomposition Dantzig-Wolfe, renforcement de la relaxation linéaire, fonction boite noire.*

1 Introduction

La programmation mathématique permet de résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire en formalisant le problème sous forme de contraintes linéaires ou non-linéaires. Les formulations compactes sont des modèles mathématiques avec un nombre polynomial de variables et de contraintes. D'autres formulations avec un nombre exponentiel de variables ou de contraintes permettent de renforcer la relaxation linéaire ou de réduire les temps de calcul. En programmation mathématique, la décomposition de Dantzig-Wolfe [1] permet de reformuler une formulation compacte en formulation étendue. Le but est de diviser la formulation compacte en un problème maître et un ou plusieurs problèmes secondaires. Comme le modèle peut contenir un nombre exponentiel de variables, il existe une méthode appelée la Génération de Colonnes qui résout la relaxation linéaire. La génération de colonnes consiste à résoudre itérativement le problème maitre et le sous-problème jusqu'à converger vers la solution optimale. Le pricing est l'algorithme permettant de résoudre le problème d'optimisation associé au problème secondaire [2]. Cette décomposition permet d'obtenir au moins la même relaxation linéaire que la formulation compacte. Par exemple, dans le cadre du flot multi-commodité où les chemins doivent respecter une contrainte de bout en bout comme le délai, si le sous-problème pricing résout le problème de plus court chemin avec une contrainte sur une ressource (le délai), c'est-à-dire que la contrainte de ressource est déportée dans le pricing, alors la relaxation linéaire du problème maître peut être meilleure.

Considérons le modèle suivant où S représente un ensemble de contraintes structurelles, comme par exemple les contraintes liées au calcul d'un plus court chemin, et K un ensemble de contraintes supplémentaires. On définit un ensemble d'éléments E et $F \subseteq E$ une famille d'éléments. Un problème d'optimisation consiste à trouver une famille d'éléments faisable pour les contraintes S et K tel que le coût associé est minimum. Ce problème peut se résoudre à l'aide du modèle compacte (voir ci-dessous à gauche) où une variable binaire x_e représente le fait de sélectionner ou non un élément e dans la solution. Soit $K' \subset K$ un sous-ensemble des contraintes supplémentaires. Le modèle à droite correspond à une formulation possible obtenue à l'aide de la décomposition de Dantzig-Wolfe. Les variables y_F représentent le fait de sélectionner ou non un sous-ensemble d'éléments de $\mathcal{F} \subset E^{|E|}$ dans la solution qui respectent les contraintes $K \setminus K'$.

$$\begin{array}{llcll}
\min \sum_{e\in E} c_e x_e & & \quad & \min \sum_{F\in\mathcal{F}:e\in F} c_F y_F & \\
\sum_{e\in E} a_{e,i} x_e \geq b_i & \forall i \in S, & & \sum_{F\in\mathcal{F}} y_F \geq 1 & \\
f^j(x) \geq 0 & \forall j \in K. & & f^j(y) \geq 0 & \forall j \in K' \subseteq K.
\end{array}$$

On remarque que si les fonctions f^j où $j \in K' \subseteq K$ sont linéaires alors on peut utiliser les algorithmes de types génération de colonnes pour résoudre le modèle.

2 Nouvelle formulation

La version "classique" de la décomposition de Dantzig-Wolfe consiste à déléguer des contraintes de structure des variables au problème de générations des dites variables (génération de colonnes). Nous proposons ici d'étendre cette décomposition à plusieurs ensembles différents de contraintes : des contraintes de structure et des contraintes additionnelles. En effet, si les contraintes structurelles données par S représentent un problème d'optimisation bien connu, on peut décomposer le modèle pour résoudre le problème associé aux contraintes S plus une contrainte de K dans chaque sous-problème. Cela consiste à garder une structure simple dans chaque sous-problème en la combinant avec des contraintes plus complexes. L'idée principale est de réutiliser des algorithmes performants permettant par exemple de résoudre efficacement des problèmes d'optimisation combinatoire. Par exemple, dans le cadre du problème du plus court chemin avec plusieurs contraintes de ressources chaque sous-problème consiste à résoudre un plus court chemin avec une contrainte de ressource et au-dessus des sous-problèmes le problème maître s'assure de faire converger les sous-problèmes vers un consensus.

Considérons le modèle mathématique ci-dessous à gauche où on propose une formulation compacte avec plus de variables et de contraintes que dans la formulation compacte précédente. Remarquons que les solutions optimales des deux modèles sont équivalentes. Le modèle mathématique ci-dessous à droite représente une décomposition possible de Dantzig-Wolfe, où y^j_F correspond à selectionner la famille F d'éléments pour la contrainte j.

$$
\begin{aligned}
& \min \sum_{e \in E} c_e x_e && \\
& \sum_{e \in E} a_{e,i} x_e \geq b_i && \forall i \in S, \\
& x_e - x^j_e = 0 && \forall j \in K, e \in E, \\
& \sum_{e \in E} a_{e,i} x^j_e \geq b_i && \forall j \in K, i \in S, \\
& f^j(x^j) \geq 0 && \forall j \in K. \\
& f^j(x) \geq 0 && \forall j \in K.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \min \sum_{e \in F} c_e x_e && \\
& \sum_{e \in E} a_{e,i} x_e \geq b_i && \forall i \in S, \\
& \sum_{F \in \mathcal{F}_j} y^j_F = 1 && \forall j \in K, \\
& x_e - \sum_{F \in \mathcal{F}_j : e \in F} y^j_F = 0 && \forall j \in K, \forall e \in E.
\end{aligned}
$$

où $\mathcal{F}_j \subset E^{|E|}$ sont valides pour la contrainte j.

Si par exemple les contraintes structurelles représentent les contraintes de plus court chemin alors chaque pricing consistera à résoudre un problème de plus court chemin avec une contrainte de ressource $j \in K$. Le problème maitre assurera un consensus entre tous les sous-problèmes afin de trouver un chemin qui respecte toutes les contraintes supplémentaires K.

3 Propriétés

Nous montrerons comment cette nouvelle formulation étendue peut améliorer les temps de calcul, la qualité de la relaxation linéaire et intégrer des algorithmes ayant des contraintes inconnues et donc nous permettant de gérer des contraintes de type « boite noire ».

Références

[1] George B. Dantzig, Philip Wolfe. Decomposition Principle for Linear Programs. Operations Research, 8(1) :101-111, 1960.

[2] Guy Desaulniers, Jacques Desrosiers, Marius M. Solomon. Column Generation. Springer-Verlag New York Inc, p. 358, 2005.