Matrice-dominance : une extension de la dominance de Pareto appliquée à la replanification ferroviaire en temps réel

Hugo Belhomme^{1,2}, Stéphane Dauzère-Pérès², Mathieu Gagnon¹, François Ramond¹

¹ SNCF, Direction Technologies, Innovation et Projets Groupe, groupe Modélisation et Optimisation de la Décision

{hugo.belhomme, mathieu.gagnon, francois.ramond}@sncf.fr

² Mines Saint-Etienne, LIMOS, laboratoire Sciences de la Fabrication et Logistique
dauzere-peres@emse.fr

Mots-clés : *Multi-objectif, dominance, replanification, ferroviaire*

1 Introduction

1.1 Limites de la dominance de Pareto

Lorsqu'on ne souhaite pas pondérer ou hiérarchiser les objectifs, la façon classique de résoudre des problèmes d'optimisation multi-objectif est de déterminer des ensembles de solutions équivalentes, dits ensembles de solutions non dominées ou fronts, en utilisant la dominance de Pareto. La dominance de Pareto indique que la solution s_1 domine (strictement) la solution s_2 si s_1 est (strictement) meilleure sur au moins un objectif, et au moins aussi bonne sur tous les autres. Pour simplifier la lecture, dans le reste du document et sauf mention contraire, les relations de dominance seront toutes considérées au sens strict.

Bien que largement utilisée, la dominance de Pareto n'est pas adaptée aux problèmes à grand nombre d'objectifs et comporte un certain nombre de faiblesses, voir récemment Sexena et al.[8]. Plus le nombre d'objectifs augmente, plus les ensembles non dominés construits avec la dominance de Pareto deviennent grands (proportionnellement). En effet, ajouter un nouvel objectif ouvre une nouvelle possibilité pour les solutions d'être meilleures que d'autres sur un objectif, de sorte que les solutions dans les problèmes avec beaucoup d'objectifs ont beaucoup plus de chances de ne pas être dominées par les autres objectifs. Par exemple, Kukkonen et al.[5] ont montré que, pour un problème à 8 objectifs, l'ensemble de solutions non dominées contient environ 50% de l'espace des solutions réalisables et qu'avec 20 objectifs, toutes les solutions réalisables de leur problème sont contenues dans la frontière de Pareto, qui perd alors de son intérêt pour la résolution du problème.

Par ailleurs, un autre inconvénient majeur de la dominance de Pareto est que si une solution est peu performante pour tous les objectifs sauf un, cette solution peut être incluse dans l'ensemble non dominé. De telles solutions, appelées solutions résistantes à la dominance, ne sont pas forcément souhaitables dans un contexte industriel car les opérateurs sont en général capables de spécifier à l'avance quels compromis ne sont pas souhaitables. La dominance de Pareto ne permet pas de définir de telles préférences.

De plus, d'après Farina et al.[2] et Saxena et al. [8], la dominance de Pareto n'est pas adaptée à la prise de décision par des opérateurs. Saxena et al.[8] s'intéressent aux éléments liés à la prise de décision par des opérateurs et indiquent qu'il manque trois éléments à la dominance de Pareto lorsqu'elle est utilisée pour comparer deux solutions dans le cadre d'une prise de décision par l'humain : (1) le nombre d'objectifs qui sont améliorés, (2) l'ampleur des améliorations et (3) les préférences des utilisateurs quand cela est pertinent.

1.2 Problème industriel considéré

Chaque jour, le réseau Transilien transporte des millions de voyageurs dans un réseau particulièrement dense, c'est-à-dire un réseau ferroviaire où les trains sont tellement proches qu'il est difficile d'en ajouter de nouveaux. Lors de l'exploitation d'un tel réseau, des événements de natures variées peuvent survenir et se propager dans le réseau, perturbant ainsi son fonctionnement. À Transilien, des décideurs supervisent les lignes et prennent des décisions de replanification pour répondre aux perturbations en temps réel.

Le problème d'optimisation sous-jacent est un problème multi-objectif de replanification ferroviaire en temps réel. Ce problème a été étudié et positionné dans la littérature par Altazin et al.[1]. Les solutions du problème sont des scénarios de replanification du plan de transport, c'est à dire des ensembles d'actions appliquées à la situation perturbée. Les actions considérées sont classiques dans la littérature ferroviaire : ajout et suppression d'arrêt, suppression de train et limitation de train. Limiter un train signifie effectuer plus tôt que prévu dans son trajet l'opération de retournement le transformant en son train "retour", ce qui permet de ne desservir ni la fin de son parcours ni le début du train retour correspondant. Quatre objectifs sont minimisés : la durée de la perturbation, le retard des engins moteurs, le temps attendu en gare par tous les voyageurs et le temps passé à bord d'un train par tous les voyageurs.

La forte combinatoire du problème et le besoin de le résoudre en quelques secondes empêchent la résolution exacte du problème. Altazin et al.[1] proposent donc une méthode de résolution itérative basée sur un couplage optimisation-simulation. L'espace des solutions est exploré de façon heuristique et chaque scénario rencontré est évalué par un simulateur macroscopique puis ajouté ou non à l'ensemble des solutions non dominées. Une fois le critère d'arrêt de l'exploration atteint, un processus de sélection vient déterminer parmi les dizaines ou centaines de solutions non dominées celles qui seront présentées à l'utilisateur.

L'objectif de ces travaux est de proposer une notion de dominance capable de palier aux faiblesses de la dominance de Pareto sans perdre ses avantages par rapport à la pondération ou au classement des objectifs. Dans cet article, après une brève revue de littérature des variations de la dominance de Pareto dans la section 2, le concept de matrice-dominance est introduit et formalisé dans la section 3. La section 4 présente deux utilisations de la matrice-dominance dans notre contexte industriel, en tant que relation de dominance et en tant que condition d'élagage pour l'exploration, puis évoque des résultats sur des instances industrielles.

2 Revue de littérature

La littérature scientifique comporte principalement deux classes de variations de la dominance : des variations qui modifient la zone de dominance des solutions en introduisant des liens entre les objectifs ou d'autres variations qui divisent l'espace des objectifs en plusieurs zones afin d'inciter à une meilleure diversité des solutions sélectionnées.

Les variations qui étendent la zone de dominance d'une solution (notamment Ikeda et al.[3] et Liu et al.[7]) permettent à la fois d'obtenir de meilleurs compromis entre les objectifs, afin d'écartier les solutions résistantes à la dominance et d'élargir ou de restreindre la zone de dominance d'une solution en fonction du rapport utilisé entre les objectifs, ce qui peut contribuer à réduire la taille des fronts.

D'autres variations, comme Laumanns et al.[6] et Yang et al.[9] utilisent un maillage spatial de l'espace des solutions. Ces méthodes spatiales fournissent une relation de dominance moins stricte et permettent de petits compromis entre les objectifs. Elles garantissent que les solutions d'un front sont suffisamment éloignées, en fonction du ϵ pour Laumanns et al.[6] ou de la maille de la grille utilisée pour Yang et al.[9]. Cependant, la qualité des résultats dépend des valeurs des paramètres, dont le choix reste un problème complexe.

D'autres types de variations de la dominance de Pareto ont été également proposés, notamment par Köppen et al.[4] et Kukkonen et al. [5], mais à notre connaissance, aucune des variations proposées dans la littérature n'est conçue pour prendre en compte des actions venant modifier une situation initiale et intégrer des connaissances industrielles.

3 Matrice-dominance

3.1 Concept

La matrice-dominance est une dominance qui permet aux décideurs de spécifier leurs préférences tout en préservant le noyau mathématique de la dominance de Pareto. L'idée est d'imposer des gains sur les objectifs pour accepter des actions. Pour cela, nous proposons d'utiliser une matrice de gains exigés dont la taille est le nombre d'objectifs multiplié par le nombre de types d'actions. La matrice-dominance impose que l'ajout d'une action à une solution améliore un objectif d'au moins un certain gain exigé.

Dans notre contexte industriel de replanification ferroviaire, cela revient à formaliser les raisonnements du type «Une suppression de train n'est acceptable que si elle permet de réduire la durée de la perturbation d'au moins 30 minutes». Puisque le problème de replanification est résolu en temps réel de manière empirique, les opérateurs de SNCF Transilien ont l'expérience pour identifier les bonnes et les mauvaises solutions dans une certaine mesure, et sont donc capables de fournir les gains exigés dans les matrices. Suite à des ateliers de calibration avec des experts, des matrices de gains telles que celle du tableau 1 ont été définies, où les colonnes correspondent aux types d'actions et les lignes aux objectifs. Puisque nos objectifs doivent être minimisés, tous les gains requis sont négatifs.

Objectif	Limitation d'un train	Suppression d'un train	Suppression d'un arrêt	Ajout d'un arrêt	Unité
Durée de la perturbation	-25	-30	-100	$-\infty$	min.
Temps de voyage	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	-3	min./pass.
Temps d'attente	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	-1	min./pass.
Retard des engins	-40	-40	-100	$-\infty$	min.

TAB. 1 – Exemple de matrice de gains exigés

Avec la matrice du tableau 1, les exigences relatives à une limitation sont clairement définies et peuvent être intégrées à la méthode de résolution : si l'ajout d'une limitation d'un train ne réduit pas la durée de la perturbation d'au moins 25 minutes ou la somme des retards d'au moins 40 minutes, cette limitation ne pourra pas être prise en compte dans une solution.

3.2 Formalisation

Introduisons quelques notations et définitions pour définir formellement le concept de matrice-dominance. On considère les ensembles suivants :

- $\mathcal{O}$: l'ensemble des objectifs,
- $\mathcal{T}$: l'ensemble des types d'actions,
- $\mathcal{A}_t$: l'ensemble de toutes les actions de type t possibles,
- $\mathcal{S}$: l'ensemble de tous les scénarios possibles, où un scénario $s \in \mathcal{S}$ est un ensemble d'actions, autrement dit une solution de notre problème d'optimisation multi-objectif.

On utilise les notations suivantes :

- M est la matrice de gains exigés, et $M_{o,t}$ est le gain exigé sur l'objectif o pour une action de type t ,
- $o(s)$ est la valeur de l'objectif $o \in \mathcal{O}$ dans le scénario $s \in \mathcal{S}$,
- $n_t(s)$ est le nombre d'actions de type $t \in \mathcal{T}$ dans le scénario $s \in \mathcal{S}$.

Les gains exigés associés à l'objectif $o \in \mathcal{O}$ sont négatifs quand o est à minimiser, et inversement, les gains exigés associés à un objectif sont positifs quand o est à maximiser.

Définition 1 (Excès de gain). Soit $o \in \mathcal{O}$ et $s \in \mathcal{S}$, l'**excès de gain** $\Delta_o(s)$ est défini par

$$\Delta_o(s) = o(s) - \sum_{t \in \mathcal{T}} n_t(s) \times M_{o,t}$$

Définition 2 (Matrice-dominance). Soit $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$, s_1 **matrice-domine** s_2 si :

$\forall o \in \mathcal{O}$, $\Delta_o(s_1) \leq \Delta_o(s_2)$ si o est à minimiser ou $\Delta_o(s_1) \geq \Delta_o(s_2)$ si o est à maximiser,

$\exists o' \in \mathcal{O}$, $\Delta_{o'}(s_1) < \Delta_{o'}(s_2)$ si o' est à minimiser ou $\Delta_{o'}(s_1) > \Delta_{o'}(s_2)$ si o' est à maximiser.

Dans la suite, la matrice-dominance entre deux scénarios s_1 et s_2 est notée en utilisant le symbole $\succ$, i.e. $s_1 \succ s_2$ signifie que s_1 matrice-domine s_2 .

Exemple. On considère le problème de replanification ferroviaire avec une situation perturbée fictive, un objectif à minimiser (RT) et deux scénarios tels que :

s_0 est un scénario où aucune action n'est prise et $RT_0 = 1200$,

s_1 est un scénario avec une limitation d'un train et $RT_1 = 900$,

α est le gain exigé sur l'objectif RT pour une limitation d'un train.

Si $\alpha = -100$, on a $\Delta_{RT}(s_0) = 1200 - 0 = 1200$ et $\Delta_{RT}(s_1) = 900 - (-100) = 1000$, donc $\Delta_{RT}(s_1) < \Delta_{RT}(s_0)$ et $s_1 \succ s_0$, le gain apporté par la limitation est suffisant. Si $\alpha = -400$, on a $\Delta_{RT}(s_0) = 1200 - 0 = 1200$ et $\Delta_{RT}(s_1) = 900 - (-400) = 1300$ donc $\Delta_{RT}(s_0) < \Delta_{RT}(s_1)$ et $s_0 \succ s_1$. Le gain apporté par la limitation n'est pas suffisant et s_1 ne sera pas dans le front.

Ainsi, selon les gains exigés, il est possible de se ramener à des situations trop restrictives ou de garantir une certaine qualité des solutions non dominées.

Propriété 1. Si tous les gains exigés sont nuls, c'est à dire pour M telle que $M_{o,t} = 0$, $\forall o \in \mathcal{O}, t \in \mathcal{T}$, la matrice-dominance est équivalente à la dominance de Pareto.

Propriété 2 (Transitivité). Lorsque la matrice de gains exigés est fixée, la matrice-dominance est une relation transitive.

Preuve : Soient s_1, s_2 et $s_3 \in \mathcal{S}$ tels que $s_1 \succ s_2 \succ s_3$. Pour faciliter la lecture, supposons que tous les objectifs doivent être minimisés. Montrons que $s_1 \succ s_3$:

$$s_1 \succ s_2 \Rightarrow \exists o \in \mathcal{O}, \Delta_o(s_1) < \Delta_o(s_2) \quad (1)$$

$$s_2 \succ s_3 \Rightarrow \Delta_o(s_2) \leq \Delta_o(s_3) \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \Delta_o(s_1) < \Delta_o(s_3) \quad (3)$$

$$s_1 \succ s_2 \succ s_3 \Rightarrow \forall c, \Delta_c(s_1) \leq \Delta_c(s_2) \leq \Delta_c(s_3) \quad (4)$$

D'après (3) et (4), il existe au moins un objectif (o) tel que s_1 est strictement meilleur que s_3 et pour tous les autres objectifs, s_1 est au moins aussi bon que s_3 donc $s_1 \succ s_3$. $\square$

4 Utilisations et résultats en contexte industriel

4.1 En tant que relation de dominance

Le premier cas d'usage de la matrice-dominance est, par définition, en tant que concept de dominance. Utiliser la matrice-dominance plutôt que la dominance de Pareto pour déterminer des fronts de solutions permet d'obtenir des fronts qui sont :

Plus facile à comprendre et à adapter. Dans la plupart des problèmes d'optimisation multi-objectif, la définition des préférences se fait en affectant des coûts aux actions et des poids aux objectifs. Cependant, il est souvent difficile, voire impossible en pratique, de définir les coûts des actions et de maîtriser l'impact de ces coûts sur les différents objectifs lorsqu'ils sont combinés. En tant qu'outils, les matrices de gains exigés sont plus simples à manipuler que des listes de coûts et de poids, à la fois pour les personnes chargées de leur calibration et dans les discussions avec les décideurs.

Plus petits. En moyenne, la matrice-dominance est plus restrictive que la dominance de Pareto, ce qui conduit à des ensembles de solutions plus petits, donc plus facile à manipuler.

Garantis de satisfaire les exigences. Par définition, les solutions du front ne sont dominées par aucune solution connue. En raison de la définition de la matrice-dominance, chaque action de chaque solution du front satisfait au moins une exigence de la matrice des gains, ce qui est très intéressant industriellement.

Des expérimentations ont été réalisées pour évaluer l'intérêt de la matrice-dominance comme relation de dominance. Pour cela, les performances de cinq matrices ont été comparées sur 36 instances réelles de perturbations sur les lignes L et J de Transilien. Ces instances ont été résolues en utilisant plusieurs profondeurs maximales de l'espace des solutions, c'est à dire en faisant varier le nombre maximal de décisions dans un scénario entre 2 et 4 pour contrôler la taille de l'espace des solutions. Les cinq matrices de gains exigés construites pour évaluer les performances selon les exigences sont :

- M_0 , une matrice qui ne contient que des zéros. Comme indiqué dans la section 3.2, lorsqu'une matrice nulle de gain exigés est utilisée pour la matrice-dominance, la matrice-dominance est équivalente à la dominance de Pareto. Cette matrice M_0 sert donc de point de comparaison.
- M_1 , construite après des échanges avec les opérateurs de Transilien, et a été conçue pour être le plus proche possible de la réalité du terrain.
- M_2 , qui correspond à M_1 avec toutes ses valeurs multipliées par 10, pour observer l'effet d'une augmentation proportionnelle de toutes les valeurs d'une matrice de gains exigés.
- M_3 et M_4 , des matrices pseudo-aléatoires conçues pour suivre la structure de M_1 mais avec des valeurs aléatoires du même ordre de grandeur.

Le tableau 2 présente les tailles médianes et maximales des fronts obtenus sur les 36 instances de test en fonction de la profondeur autorisée et de la matrice de gain exigée. Ce tableau permet de confirmer que l'augmentation des exigences de gains tend à réduire la taille des fronts. Par exemple pour une profondeur de 3, le passage de M_1 à M_2 (c'est-à-dire la multiplication par 10 des exigences) fait passer la médiane de 35 à 2. Par rapport à la dominance de Pareto (M_0), les fronts obtenus par la matrice-dominance sont significativement plus petits quand la comparaison est possible.

Profondeur	2					3					4				
	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
Maximum	651	220	64	29	11	3592	472	64	53	13	-	8983	86	506	63
Médiane	64	20	2	4	1	177	35	2	4	1	-	76	2	3	1

TAB. 2 – Nombre de solutions dans les ensembles de solutions non dominées finaux en fonction de la matrice de gains exigés et de la profondeur ("-" indique que les calculs ont été abandonnés faute de temps)

4.2 Pour élaguer un arbre de solutions

La matrice-dominance peut aussi être utilisée en tant que condition dans un algorithme d'exploration d'un arbre de solutions. En utilisant un arbre où chaque noeud représente l'ajout d'une nouvelle décision au scénario parent, la matrice-dominance entre un parent et son enfant peut permettre d'évaluer l'intérêt d'explorer la branche correspondante en utilisant la conjecture suivante :

Conjecture. "Si un noeud n est matrice-dominé par son parent, alors il n'est pas intéressant d'explorer les enfants du noeud n ".

L'idée de cette conjecture est de considérer que la qualité d'une solution est fortement héréditaire. En pratique, un test de matrice-dominance est effectué entre le noeud courant et chacun de ses enfants, puis tous les enfants qui ne sont pas matrice-dominés sont ajoutés à la liste des noeuds à explorer. Cependant, cette conjecture n'est pas toujours vérifiée dans le cas du problème industriel considéré dans ces travaux : il est en effet possible qu'une décision qui n'est pas intéressante à ajouter à un certain scénario puisse le devenir lorsqu'elle est associée à d'autres décisions.

Nous avons comparé l’heuristique utilisant cette conjecture à une exploration exhaustive de tous les noeuds de l’arbre en utilisant les mêmes matrices et les mêmes instances que dans l’expérimentation précédente. Dans 98% des configurations testées, l’heuristique utilisant la matrice-dominance comme condition d’élagage a trouvé exactement les mêmes fronts que la recherche exhaustive, c’est à dire le front optimal au sens de la dominance utilisée. Cependant, les fronts construits par cette heuristique le sont en explorant seulement une fraction de l’espace des solutions, contrairement à la recherche exhaustive qui l’explore dans sa totalité. Selon les exigences (en excluant M_∞), l’heuristique utilisant la matrice-dominance explore entre 50% et 5% de l’espace pour trouver les mêmes fronts que la recherche exhaustive dans 98% des cas, permettant des gains de temps d’ordres de grandeurs similaires.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons introduit, formalisé et évalué une nouvelle extension de la dominance de Pareto : la matrice-dominance, qui utilise la notion de matrices de gains exigés pour relier par des exigences les objectifs optimisés et les actions de replanifications considérées. Ce concept de matrice-dominance est utilisable dans tout problème multi-objectif où l’objectif est d’appliquer des actions à une situation initiale. Il a été validé industriellement et implanté dans un outil d’aide à la décision développé à la SNCF, à l’issue d’ateliers de calibration et d’expérimentations sur le terrain.

Les perspectives relatives à la matrice-dominance suivent principalement deux directions : l’étude de nouvelles propriétés et conjectures, et la conception d’un processus automatique de calibration des exigences de gains, nécessaire pour passer à l’échelle industriellement.

Références

- [1] E. Altazin, S. Dauzère-Pérès, F. Ramond, and S. Tréfond. A multi-objective optimization-simulation approach for real time rescheduling in dense railway systems. *European Journal of Operational Research*, 2020.
- [2] M. Farina and P. Amato. A fuzzy definition of optimality for many-criteria optimization problems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A : Systems and Humans*, 34(3) :315–326, 2004.
- [3] K. Ikeda, H. Kita, and S. Kobayashi. Failure of pareto-based moeas : Does non-dominated really mean near to optimal? In *Proceedings of the 2001 congress on evolutionary computation*, volume 2, pages 957–962, 2001.
- [4] M. Köppen, R. Vicente-Garcia, and B. Nickolay. Fuzzy-pareto-dominance and its application in evolutionary multi-objective optimization. In *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, pages 399–412, 2005.
- [5] S. Kukkonen and J. Lampinen. Ranking-dominance and many-objective optimization. In *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pages 3983–3990, 2007.
- [6] M. Laumanns, L. Thiele, K. Deb, and E. Zitzler. Combining convergence and diversity in evolutionary multiobjective optimization. *Evolutionary computation*, 10(3) :263–282, 2002.
- [7] Y. Liu, N. Zhu, K. Li, M. Li, J. Zheng, and K. Li. An angle dominance criterion for evolutionary many-objective optimization. *Information Sciences*, 509 :376–399, 2020.
- [8] D. K. Saxena, S. Mittal, S. Kapoor, and K. Deb. A localized high-fidelity-dominance based many-objective evolutionary algorithm. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2022.
- [9] S. Yang, M. Li, X. Liu, and J. Zheng. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 17(5) :721–736, 2013.