Méthodes exactes pour la résolution du problème de job-shop robuste avec budget d'incertitude

Carla Juvin[1,2], Laurent Houssin[1,3], Pierre Lopez[1]

[1] LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, Toulouse, France
{carla.juvin,pierre.lopez}@laas.fr
[2] ENAC, Université de Toulouse, France
[3] ISAE-SUPAERO, Université de Toulouse, France
laurent.houssin@isae-supaero.fr

Mots-clés : *Problèmes d'ordonnancement, optimisation robuste multi-étape, budget d'incertitude, programmation linéaire en nombres entiers, programmation par contraintes.*

1 Introduction

En ordonnancement, le problème de job-shop fait l'objet d'une vaste littérature. Il s'inscrit dans la catégorie des problèmes d'optimisation NP-difficiles. Dans un problème de job-shop, un job est composé d'une séquence d'opérations devant être exécutées sans interruption sur des machines suivant une gamme propre au job et chaque machine ne peut réaliser qu'une opération à la fois. Ce problème a été largement étudié, la majorité des travaux traitant de problèmes à paramètres parfaitement déterminés. Toutefois, en pratique, de nombreuses sources d'incertitudes existent, notamment sur la durée des opérations.

Pour prendre en compte ces incertitudes, on trouve principalement deux types d'approches : l'optimisation stochastique qui s'appuie sur des distributions de probabilités sur la valeur des paramètres et l'optimisation robuste qui considère des scénarios d'incertitudes et qui cherche à optimiser des solutions dans le pire des cas sur ces scénarios.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la conception de méthodes exactes pour résoudre le job-shop robuste. Nous proposons pour cela une optimisation robuste en deux étapes, la première étape s'occupant du séquencement des jobs sur les machines, la seconde déterminant la date de début des opérations.

2 Définition du problème

Le problème étudié consiste à ordonnancer un ensemble de n jobs $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$ sur un ensemble $\mathcal{M}$ de machines. Chaque job i est défini comme une séquence de n_i opérations $\mathcal{O}_i = (i_1, \ldots, i_{n_i})$. Une opération $O_{i,j} \in \mathcal{O}_i$ doit être traitée par une machine prédéterminée $\mu_{i,j}$, pour une durée $p_{i,j}$, chaque machine pouvant traiter au plus une opération à la fois.

Nous considérons ici des durées de traitement incertaines. Pour une opération $O_{i,j}$, on a : $p_{i,j} \in [\bar{p}_{i,j}; \bar{p}_{i,j} + \hat{p}_{i,j}]$, où $\bar{p}_{i,j}$ est la valeur nominale et $\hat{p}_{i,j}$ la déviation maximale de la durée.

Afin d'établir un compromis entre la robustesse d'une solution obtenue et sa qualité, nous définissons un ensemble d'incertitude en exploitant une approche proposée dans [1], basée sur la notion de budget d'incertitude qui permet une restriction sur le nombre de déviations pouvant se produire en même temps.

Soit ξ un scénario et soit Γ le budget d'incertitude, c'est-à-dire le nombre maximum d'opérations dont la durée peut varier dans un même scénario. On a : $p_{i,j}(\xi) = \bar{p}_{i,j} + \xi_{i,j} \cdot \hat{p}_{i,j}$ où $\xi_{i,j}$ est égal à 1 si la durée de l'opération dévie, 0 sinon.

On définit alors l'ensemble d'incertitude $\mathcal{U}^\Gamma = \{(\xi_{i,j})_{i \in \mathcal{J}, 1 \leq j \leq n_i} \mid \sum_{i \in \mathcal{J}} \sum_{j=1}^{n_i} \xi_{i,j} \leq \Gamma\}$.

Dans l'optimisation robuste multi-étapes introduite dans [2], une partie des variables de décision doit être instanciée avant la révélation de l'incertitude, tandis que les autres variables peuvent être ajustées au scénario. Appliqué à notre problème, l'objectif est de trouver une séquence d'opérations sur les machines permettant de définir une date de début pour chaque opération et chaque scénario, et minimisant le makespan dans le pire des cas en considérant le budget d'incertitude.

3 Méthodes de résolution

De manière générale, un problème robuste peut être résolu à l'aide d'une formulation étendue, qui consiste à dupliquer l'ensemble des contraintes impliquant des variables ajustables (ici, les dates de traitement des opérations) pour l'ensemble des scénarios possibles. Habituellement formulé comme un problème de programmation linéaire en nombres entiers, nous montrons qu'il est aussi possible d'adopter une approche de programmation par contraintes [3], très efficace dans le cas déterministe.

Une étude du problème adverse, visant à déterminer le scénario pire cas pour une séquence d'opérations donnée, met en évidence que celui-ci est équivalent à la résolution d'un problème de plus long chemin dans un graphe acyclique orienté (DAG).

Sur la base de cette étude, nous développons plusieurs méthodes de résolution pour le problème de job shop robuste. La première s'appuie sur un modèle de programmation linéaire en nombres entiers compact, avec un nombre polynomial de contraintes par rapport au nombre d'opérations [4]. Les autres sont basées sur une décomposition du problème. Le problème maître est formulé en ne considérant qu'un sous-ensemble de scénarios, tandis que le sous-problème évalue le scénario pire cas. A chaque itération, des informations relatives à ce scénario pire cas sont ajoutées au problème maître, soit par l'ajout de coupes de Benders logiques [5], soit par la génération de colonnes et de contraintes [6].

4 Résultats expérimentaux et conclusion

Dans ce travail, nous proposons plusieurs formulations pour le problème du job-shop robuste en considérant un ensemble d'incertitude défini par un budget. Parmi les formulations directes, la formulation compacte présente de bons résultats. Elle est cependant surpassée par les méthodes de décomposition et plus particulièrement par celle pour laquelle le problème maître est modélisé en programmation par contraintes.

Références

[1] Dimitris Bertsimas and Melvyn Sim. The price of robustness. *Operations Research*, 52(1) :35–53, 2004.

[2] Aharon Ben-Tal, Alexander Goryashko, Elana Guslitzer, and Arkadi Nemirovski. Adjustable robust solutions of uncertain linear programs. *Mathematical Programming*, 99(2) :351–376, 2004.

[3] Carla Juvin, Laurent Houssin, and Pierre Lopez. Constraint programming for the robust two-machine flow-shop scheduling problem with budgeted uncertainty. In *CPAIOR*, 2023.

[4] Matthew Bold and Marc Goerigk. A compact reformulation of the two-stage robust resource-constrained project scheduling problem. *Computers & Operations Research*, 130 :105232, 2021.

[5] John N. Hooker. *Logic based methods for optimization: Combining optimization and constraint satisfaction.* John Wiley and Sons, New York, 2000.

[6] Bo Zeng and Long Zhao. Solving two-stage robust optimization problems using a column-and-constraint generation method. *Operations Research Letters*, 41(5) :457–461, 2013.