Graphes Hamiltoniens, graphes tough et condition sur les degrés

Chinh T. Hoàng[1], Cléophée Robin[12],
[1] Wilfried Laurier University, Waterloo (ON), Canada
choang@wlu.ca
[2] Laboratoire Greyc, Caen
cleophee.robin@unicaen.fr

Mots-clés : *Structure de graphes, Graphes Hamiltoniens*

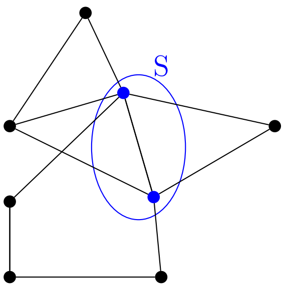
Un graphe G est *Hamiltonien* si il existe un cycle dans G contenant chaque sommet de G exactement une fois. Déterminer si un graphe est Hamiltonien est un problème NP-complet dans le cadre général. Nous cherchons des conditions structurelles suffisantes pour qu'un graphe soit Hamiltonien.

1 Graphes Tough

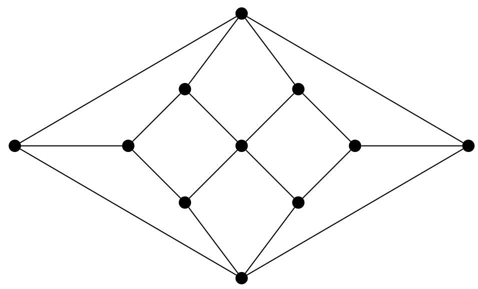
Dans un graphe G, $G \setminus S$ dénote le sous-graphe de G induit par les sommets dans $V(G) \setminus S$ (on retire les sommets dans S de G). Un ensemble de sommet S est appelé *cutset* si $G \setminus S$ est déconnecté.

Propriété 1. *S'il existe $S \subset V(G)$ tel que $G \setminus S$ possède au moins $|S| + 1$ composantes connexes, alors, G n'est pas Hamiltonien.*

Cette propriété peut être prouvée en observant qu'un cycle hamiltonien dans G ne peut pas passer d'une composante connexe de $G \setminus S$ à un autre sans passer par S. Ce n'est malheureusement pas suffisant. La figure 1 montre deux graphes non hamiltoniens. Le premier permet d'illustrer la précédente propriété. Le deuxième ne possède pas de cutset évident, mais n'est pas Hamiltonien.



S : cutset de taille 2 et $c(G \setminus S) = 3$



Herschel graph

FIG. 1 – Deux graphes non hamiltoniens

Un graphe G est *t-tough* pour un nombre t, si, pour tout sous-ensemble de sommets S, le nombre de composantes connexes de $G \setminus S$ est au plus $\frac{|S|}{t}$.

La propriété 1 implique directement qu'un graphe Hamiltonien est nécessairement 1-tough.

En 1973, Chvatal [3] fait la conjecture suivante :

Conjecture 1. *Il existe t tel que tous les graphes t-tough sont Hamiltoniens.*

Cette conjecture reste ouverte encore aujourd'hui. Nous nous intéressons à un cas particulier qui nécessite une propriété sur les degrés.

2 Une propriété sur les degrés

Une suite non décroissante d'entiers $d_1, d_2, \ldots d_n$ est la séquence de degré d'un graphe G s'il existe un ordre $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sur les sommets de G tel que le sommet v_i a degré d_i.

Pour un entier t, un graphe est $P(t)$, si pour tout $t \leq i \leq \frac{n}{2}$ tel que $d_i \leq i$, on a $d_{n-i+t} \leq n-i$.

En 1995, Hoàng [1] fait la conjecture suivante :

Conjecture 2. *Pour tout t, si G est un graphe t-tough et $P(t)$, alors G est Hamiltonien.*

Il prouve que c'est vrai pour $t \leq 3$ [1].

Nous prouvons que c'est vrais aussi pour $t = 4$. Pour ce faire, nous avons étendu le lemme de clôture de Bondy et Chvàtal [2] pour les graphes tough.

3 Lemme de t-clôture et nos contributions

La t-clôture du graphe G est le graphe G^* obtenu en ajoutant à G des arêtes entre tout couple de sommets x et y tel que la somme des degrés de x et y est au moins $n - t$. Cette opération est répétée tant qu'un tel couple existe.

Le lemme de clôture de Bondy et Chvàtal [2] est le suivant :

Lemme de Clôture. *[2] Un graphe est Hamiltonien si et seulement si sa 0 -clôture est Hamiltonien.*

Nous étendons ce résultat :

Lemme de t-Clôture. *Soit G, un graphe t-tough pour $t \geq 2$,*
G est Hamiltonien si et seulement si sa $\frac{2t+1}{3}$-clôture G^* est Hamiltonien.

Pour prouver qu'un graphe t-tough G est Hamiltonien, le lemme de t-clôture nous permet de nous concentrer uniquement sur la $\frac{2t+1}{3}$-clôture de G. C'est en l'utilisant ainsi que nous prouvons la conjecture de Hoàng pour $t = 4$.

Théorème 1. *Si G est un graphe 4-tough et P(4) alors G est Hamiltonien.*

Références

[1] C. T. Hoàng, Hamiltonian degree conditions for tough graphs. *Discrete Mathematics*, 142 (1-3) :121–139, 1995.

[2] J. A. Bondy and V. Chvatal A method in graph theory. *Discrete Mathematics*, 15(2) : 111–135, 1976.

[3] V. Chvatal Tough graphs and hamiltonian circuits. *Discrete Mathematics*, 5(3) :215–228, 1973.