Une méthode des directions alternées pour le pilotage des systèmes non-linéaires avec stockage

Sophie Demassey[1], Valentina Sessa[1], Amirhossein Tavakoli[1]

Centre de Mathématiques Appliquées, Mines Paris–PSL, Sophia-Antipolis, France

sophie.demassey,valentina.sessa,amirhossein.tavakoli@minesparis.psl.eu

Mots-clés : *programmation non-convexe en nombres entiers ; décomposition temporelle ; séparation de variables ; directions alternées*

1 Décomposition des contraintes inter-temporelles

Le pilotage de systèmes régis par des lois non-linéaires et des commandes discrètes conduit à des problèmes d'optimisation complexes. Quand le pilotage doit être planifié sur un horizon temporel pour tirer avantage de capacités de stockage, il devient difficile même de calculer une solution réalisable, car il s'agit alors d'assurer l'opération du système simultanément sur tous les pas de temps, liés par l'état du stock. En dualisant les contraintes inter-temporelles, les approches de relaxation lagrangienne permettent de décomposer le problème dynamique en sous-problèmes statiques indépendants. Cependant, si l'état du stock, qui est une inconnue alors, détermine l'opération non-linéaire du système, alors chaque sous-problème peut devenir aussi complexe que le problème global. Dans cette étude, nous adaptons la méthode des directions alternées (alternating direction method (ADM)) en séparant les variables de contrôle (les commandes discrètes) et les variables d'état (le niveau de stock). En fixant alternativement les unes puis les autres, il s'agit d'amener progressivement le pilotage du système vers un profil de stockage respectant les capacités limites.

2 Systèmes non-linéaires avec stockage

Nous nous intéressons au problème formel de contrôle optimal suivant, défini par une séquence d'états stationnaires sur l'horizon temporel discrétisé $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., T-1\}$:

$$(PO): \min_{x,y,s} \sum_{t \in \mathbb{T}} f_t(x_t, y_t, s_t, C_t) \tag{1}$$

$$\text{s.t. :} g_t(x_t, y_t, s_t, L_t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{T} \tag{2}$$

$$s_{t+1} = s_t + y_t^K \qquad \forall t \in \mathbb{T} \tag{3}$$

$$s_t \in [\underline{S}_t, \overline{S}_t] \subseteq \mathbb{R}^k \qquad \forall t \in \mathbb{T} \cup T \tag{4}$$

$$x_t \in \mathbb{X}_t \subseteq \{0,1\}^n, y_t \in \mathbb{R}^m \qquad \forall t \in \mathbb{T}. \tag{5}$$

Sur chaque période $t \in \mathbb{T}$: le vecteur de variables d'état s_t modélise le niveau de k unités de stockage de capacités finies, données par les contraintes (4) ; les vecteurs de variables x_t et y_t modélisent l'opération statique du système sur une période $t \in \mathbb{T}$, x_t représentant les commandes discrètes (binaires allumage/extinction ici) et y_t les variables continues induites ; les contraintes (2) régissent l'opération statique du système pour satisfaire la charge L_t ; les contraintes (3) décrivent l'évolution du stock où y_t^K est un sous-vecteur de y_t représentant les flux entrants ou sortants des unités de stockage. Enfin, l'objectif (1) minimise la somme des coûts d'opération étant donné un signal de prix dynamique C. Un prix dynamique et des fonctions f_t et g_t non-linéaires impliquent qu'il peut être avantageux de décaler, grâce au stockage, l'opération du système en avance du service pour tirer profit de tarifs plus bas et de meilleurs points de fonctionnement.

Notre approche supporte des fonctions f_t et g_t de toute nature analytique (y compris non-convexe) mais elle repose sur l'hypothèse suivante :

(H) le sous-problème statique $P_t(S) : \min_{x,y}\{f_t(x,y,S,C_t) \mid g_t(x,y,S,L_t)=0\}$, quand l'état initial $s_t = S$ est connu, est facile pour tout $t \in \mathbb{T}$ et $S \in \mathbb{R}^k$.

Typiquement, $P_t(S)$ va consister à simuler le système de manière statique pour chaque configuration x possible, en connaissance de la condition initiale et sans condition sur l'état final. Cette hypothèse est vérifiée par exemple dans le contexte du pilotage d'un réseau pressurisé de distribution d'eau potable. L'objectif est de minimiser le coût énergétique des pompes pour satisfaire la demande en eau aux noeuds de service, en exploitant au mieux les capacités de stockage des châteaux d'eau ; ces derniers permettant de décorréler dans le temps, pompage et service. Le problème statique, en un temps t, consiste à déterminer la configuration de pompes à allumer x_t pour satisfaire une demande L_t en assurant l'équilibre débit/pression dans le réseau. L'équilibre se traduit comme le zéro d'un système non-convexe $g_t(x_t, y_t, s_t, L_t) = 0$, qui se résoud cependant facilement par une méthode de Newton dès lors que la configuration des pompes x_t et le niveau des châteaux d'eau s_t sont fixés. Le problème statique $P_t(S)$ se résoud alors par énumération des configurations. De plus, il est possible de casser la combinatoire en partitionnant le réseau au niveau des châteaux d'eau.

3 Méthode des directions alternées

La dualisation ou la pénalisation dans l'objectif des contraintes couplantes (3) permet de séparer le problème temporellement, mais chaque sous-problème reste difficile. Nous proposons d'aborder le dual lagrangien (augmenté ou non) par une méthode des directions alternées basée sur la séparation des variables de contrôle et des variables d'état. À chaque itération i, il s'agit de fixer dans le sous-problème lagrangien, alternativement : *1.* les profils de stock $s = S^{i-1}$ et calculer $(X^i, Y^i) \in \arg\min_{x,y}\{f(x,y,S_t^{i-1},C_t) + p_t^i(S_{t+1}^{i-1} - (S_t^{i-1} + y_t^K)) : (2),(5)\}$, puis *2.* la commande $(x,y) = (X^i, Y^i)$ et calculer $S^i \in \arg\min_s\{f(X^i, Y^i, s_t, C_t) + p_t^i(s_{t+1} - (s_t + Y_t^i)) : (4)\}$. Le but étant de calculer une solution réalisable à (PO) et non d'améliorer un coût, l'algorithme s'arrête dès que stock et opération se rejoignent : $\max_t \|S_{t+1}^i - (S_t^i + Y_t^i)\| < \epsilon$. Autrement, la fonction de pénalisation p_t^i (e.g. augmentation d'une pénalité linéaire) est mise à jour quand les profils n'évoluent plus : $\|S^i - S^{i-1}\| < \epsilon'$.

La présence de contraintes non-convexes (2) ne permet pas d'invoquer les garanties de convergence connues, par exemple pour l'algorithme ADMM. Par ailleurs, en maintenant ces contraintes dans le sous-problème de l'étape *1*, nous n'appliquons pas, contrairement à la méthode générale, une séparation complète des variables. Notre objectif est d'exploiter l'hypothèse **(H)**, sous laquelle le sous-problème de l'étape *1* est facile tout en conservant suffisamment de structure pour retourner des commandes (x,y) quasi-réalisables.

Dans cette approche, nous renonçons ainsi à des garanties théoriques de convergence (au mieux vers un point critique) et visons un gain pratique. La capacité ou non de cet algorithme à calculer une solution réalisable (et de bonne qualité) dépend fortement du point d'initialisation, autrement dit du profil de stockage s^0. Nous proposons d'initialiser l'algorithme par des profils prédits par apprentissage profond (voir *A. Tavakoli, S. Demassey, V. Sessa : Deep Learning for Pump Scheduling (Roadef 2024)*). Dans nos expérimentations, nous obtenons un taux de réussite de 1 sur un benchmark où, pour le même temps de calcul, les approches exactes ou heuristiques ont un taux proche de 0. Cette approche de programmation mathématique permet ainsi la reconstruction d'une solution réalisable, sans dégradation excessive du coût, à partir d'une solution partielle (ici, les profils de stock et non la commande discrète) issue de la relaxation ou de l'approximation (par metaheuristique et/ou apprentissage) des contraintes difficiles et/ou couplantes.