

Problèmes de packing online : preuves par ordinateur

Antoine Lhomme, Nicolas Catusse, Nadia Brauner

Univ. Grenoble Alpes, CNRS, G-SCOP

Mots-clés : *Packing, optimisation online, preuves par ordinateur*

1 Problèmes de packing online et preuves par ordinateur

Dans un problème de packing “online”, des objets sont reçus de manière séquentielle. Un objet doit être placé avant que le suivant ne soit reçu. L’absence d’informations sur les objets futurs rend la prise de décision difficile ; en effet, une décision prise tôt peut se révéler être mauvaise bien plus tard. Les problèmes online sont usuellement étudiés au sens du pire cas : la performance d’un algorithme pour un problème est alors sa performance sur la pire séquence d’objets possible. Une telle analyse peut se faire avec des méthodes adversariales ; on peut modéliser le problème comme un jeu à deux joueurs, l’un étant un algorithme cherchant à placer les objets et l’autre un adversaire qui vise à envoyer une séquence d’objets difficile à placer.

Avec une telle modélisation, des techniques usuelles de théorie des jeux peuvent être utilisées pour trouver des stratégies pour un des deux joueurs : en *relaxant* le jeu pour le rendre fini, et en appliquant un algorithme min-max classique, il est possible d’obtenir une stratégie pour l’un des deux joueurs, ce qui donne une borne (inférieure ou supérieure) sur la performance optimale d’un algorithme pour le problème. Cette méthode construit des stratégies par recherche computationnelle, ce qui permet de traiter un grand nombre de cas distincts. Ainsi, il est parfois possible d’obtenir des stratégies plus “fines” que celles construites à la main jusqu’alors pour améliorer certaines bornes sur le problème.

2 Online bin stretching

Nous verrons comment s’instancient de telles méthodes pour le problème du *online bin stretching*. Pour ce problème, m boîtes, unidimensionnelles et de taille unitaire, sont à disposition. Une séquence d’objets définis par leur taille, garantie de rentrer dans les boîtes, est reçue de manière online. Il est possible de placer un objet dans une boîte sans tenir compte de sa capacité (d’où le terme stretching). L’objectif est de minimiser le volume de la boîte la plus remplie. Si les objets sont tous connus à l’avance, un algorithme peut les faire rentrer dans m boîtes de taille 1, puisque les objets sont garantis de rentrer dans les boîtes. Cependant, lorsque les objets sont donnés de manière online, il peut être nécessaire d’utiliser des boîtes de taille supérieure, comme illustré pour $m=2$ boîtes en Figure 1 qui montre que quelque soit l’algorithme, il existe une séquence d’objets telle que le volume occupé d’une boîte sera au moins $4/3$. Pour ce problème, plusieurs des meilleures bornes inférieures connues sur la meilleure performance possible d’un algorithme ont été obtenues de manière computationnelle. De même, plusieurs des meilleurs algorithmes connus proviennent de recherches computationnelles. Les meilleures bornes connues sont dans le Tableau 1.

Références

- [1] Yossi Azar and Oded Regev. On-line bin-stretching. *Theoretical Computer Science*, 268(1) :17–41, 2001. On-line Algorithms ’98.

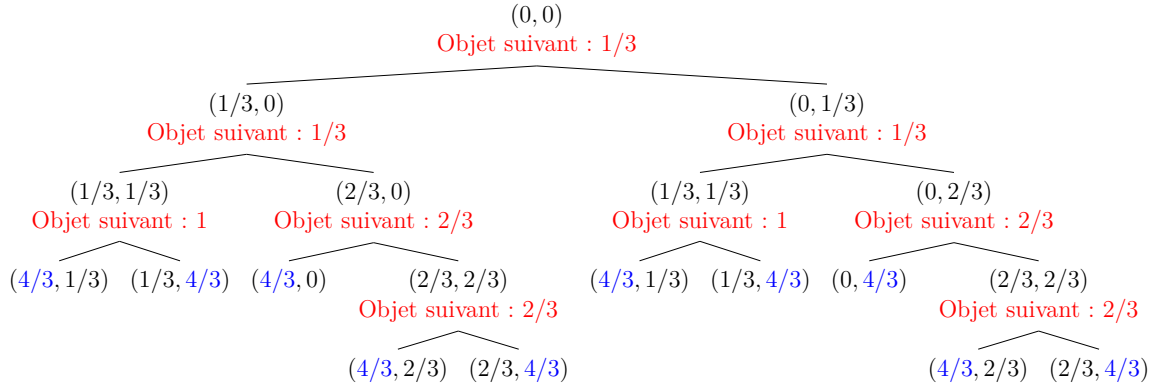


FIG. 1 – Preuve arborescente de la borne inférieure de $4/3$ pour 2 boîtes. Entre parenthèses : volume occupé pour chaque boîte. En rouge : objet à donner.

Nombre de boîtes	2	3	4	5
Borne inférieure	$4/3$ [1]	$112/82$ [3] *	$19/14$ [4] *	$19/14$ [3] *
Val. décimale	1.3334	1.3659	1.3571	1.3571
Borne supérieure	$4/3$ [5]	$11/8$ [2]	$31/22$ [7] *	$23/16$ [7] *
Val. décimale	1.3334	1.375	1.409	1.438

Nombre de boîtes	6	7	8	9 ... ∞
Borne inférieure	$15/11$ [6] *	$15/11$ [6] *	$15/11$ [6] *	$4/3$ [1]
Val. décimale	1.3571	1.3571	1.3571	1.3334
Borne supérieure	$19/13$ [7] *	$3/2$ [2]	$3/2$ [2]	$3/2$ [2]
Val. décimale	1.462	1.5	1.5	1.5

TAB. 1 – Meilleures bornes inférieures et supérieures connues pour le problème du *online bin stretching*. Un astérisque signifie que le résultat a été prouvé informatiquement.

- [2] Martin Böhm, Jiří Sgall, Rob van Stee, and Pavel Veselý. A two-phase algorithm for bin stretching with stretching factor 1.5. *Journal of Combinatorial Optimization*, 34(3) :810–828, Oct 2017.
- [3] Martin Böhm and Bertrand Simon. Discovering and certifying lower bounds for the online bin stretching problem. *Theoretical Computer Science*, 938 :1–15, 2022.
- [4] Michaël Gabay, Nadia Brauner, and Vladimir Kotov. Improved lower bounds for the online bin stretching problem. *4OR*, 15(2) :183–199, Jun 2017.
- [5] Hans Kellerer, Vladimir Kotov, Maria Grazia Speranza, and Zsolt Tuza. Semi on-line algorithms for the partition problem. *Operations Research Letters*, 21(5) :235–242, Jan 1997.
- [6] Antoine Lhomme, Olivier Romane, Nicolas Catusse, and Nadia Brauner. Online bin stretching lower bounds : Improved search of computational proofs, 2022.
- [7] Matej Lieskovský. Better algorithms for online bin stretching via computer search, 2022.