Modélisation et apprentissage de préférences non-transitives entre ensembles avec synergies entre éléments

Hugo Gilbert[1] Mohamed Ouaguenouni[2] Olivier Spanjaard[2]

[1] Université Paris-Dauphine, Université PSL, CNRS, LAMSADE, 75016 Paris, France
firstname.lastname@lamsade.dauphine.fr

[2] Sorbonne Université, CNRS, LIP6, 75005, Paris, France
firstname.lastname@lip6.fr

Mots-clés : *préférences intransitives, préférences avec synergies, modèle SSB.*

1 Introduction

Dans cette communication, nous présenterons un nouveau modèle décisionnel pour représenter des préférences sur des ensembles d'éléments, directement inspiré du modèle SSB (*Skew-Symmetric Bilinear utility*). Le modèle SSB a été proposé initialement par Fishburn dans le contexte de la décision dans le risque [1, 2]. Nous proposerons une adaptation du modèle pour comparer des ensembles (plutôt que des loteries) avec, de plus, prise en compte de synergies entre éléments. Nous présenterons également une méthode pour apprendre les paramètres de ce modèle à partir d'une base de préférences observées sur des paires d'ensembles.

2 Le modèle bilinéaire antisymétrique proposé

Soit E un ensemble de référence dont on vise à comparer des sous-ensembles. Soit θ un ensemble de sous-ensembles de E, constitué des sous-ensembles d'éléments de E qui ont des synergies positives ou négatives entre eux, ainsi que des singletons $\{\{x\} \mid x \in E\}$. Dans notre modèle, un ensemble A est caractérisé par l'ensemble $\theta_A = \{S \in \theta \mid S \subseteq A\}$. Un ensemble A est préféré à un ensemble B si l'agrégation des intensités de préférence entre les éléments de θ_A et ceux de θ_B retourne une valeur positive. Plus formellement, si $|A| = |B|$:

$$A \succsim B \Leftrightarrow \Phi(A,B) = \sum_{T\in\theta_A} \sum_{T'\in\theta_B} \phi(T,T') \geq 0$$

où $\phi(T,T')$ représente l'intensité de préférence de T sur T' (négative si T' est préféré à T). La fonction ϕ est antisymétrique, c'est à dire que $\phi(T,T') = -\phi(T',T)$. Si les ensembles A et B sont de tailles différentes (supposons que $|A| > |B|$), alors on applique la formule précédente en ajoutant $|\theta_A| - |\theta_B|$ occurrences de l'ensemble vide à θ_B.

Exemple 1 *Soit* $E = \{a,b,c,d\}$ *et* $\theta = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\}\}$. *L'intensité de préférence de* $A = \{a,b,c\}$ *sur* $B = \{d\}$ *est obtenue par la formule :*

$$\begin{aligned}\Phi(A,B) = {} & \phi(\{a\},\{d\}) + \phi(\{b\},\{d\}) + \phi(\{c\},\{d\}) + \phi(\{a,b\},\{d\}) \\ & + 3\phi(\{a\},\emptyset) + 3\phi(\{b\},\emptyset) + 3\phi(\{c\},\emptyset) + 3\phi(\{a,b\},\emptyset)\end{aligned}$$

car $\theta_A = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\}\}$ *et* $\theta_B = \{\{d\},\emptyset,\emptyset,\emptyset\}$.

Une particularité intéressante de notre modèle est sa capacité à modéliser des préférences qui peuvent être non seulement intransitives mais également sensibles à des synergies (positives ou négatives) entre éléments [3, 4]. Remarquons qu'en posant $\theta = \{\{x\} \mid x \in E\}$, $\phi(\{x\},\{y\}) = w_x - w_y$, et $\phi(\{x\},\emptyset) = w_x$, où w_x représente l'utilité de l'élément x, on retrouve le modèle classique d'utilité additive.

Dans cette communication, après avoir détaillé les propriété de notre modèle, nous montrerons une procédure permettant l'apprentissage de ces paramètres à partir d'une base de préférences observées sur des paires d'ensembles.

3 Apprentissage du modèle bilinéaire antisymétrique

À partir d'un ensemble R de préférences par paires, nous résolvons un programme linéaire pour apprendre les paramètres $\phi(T, T')$ (pour $T, T' \in \theta \cup \{\emptyset\}$) du modèle bilinéaire antisymétrique. Pour ce faire, nous nous appuyons sur la décomposition suivante de la fonction Φ, entre une partie linéaire $\mathcal{L}$ (mais avec des synergies possibles) et une partie bilinéaire $\mathcal{B}$:

$$\Phi(A, B) = \underbrace{\sum_{T \in \theta_A} w_T - \sum_{T' \in \theta_B} w_{T'}}_{\mathcal{L}} + \underbrace{\sum_{T \in \theta_A} \sum_{T' \in \theta_B} \phi(T, T')}_{\mathcal{B}} .$$

Nous recherchons le jeu de paramètres qui minimise en premier lieu la norme ℓ_1 sur $\mathcal{L}$, puis sur $\mathcal{B}$, parmi ceux respectant les préférences observées dans R, i.e., tels que $\Phi(A, B) \geq 1$ si $(A \succ B) \in R$. De cette manière, nous obtenons un modèle parcimonieux et qui se rapproche autant que possible d'un modèle linéaire.

4 Évaluation du modèle

Dans la première partie de l'exposé, nous nous focaliserons sur l'étude des propriétés du modèle bilinéaire proposé. Nous montrerons en particulier que ce modèle est capable d'expliquer n'importe quel tournoi sur les sous-ensembles de E.

Dans une deuxième partie, nous détaillerons plus précisément la méthode proposée pour l'apprentissage des paramètres du modèle, et nous présenterons les résultats numériques obtenus sur des données synthétiques. Nous comparerons ces résultats à ceux obtenus par des modèles issus de la littérature, tant du point de vue du temps de calcul que du point de vue de la qualité des prédictions.

Références

[1] Denis Bouyssou and Marc Pirlot. Nontransitive decomposable conjoint measurement. *Journal of Mathematical Psychology*, 46(6) :677–703, 2002.

[2] Peter C. Fishburn. Nontransitive measurable utility. *Journal of Mathematical Psychology*, 26(1) :31–67, 1982.

[3] Peter C. Fishburn and Irving H. Lavalle. Binary interactions and subset choice. *European Journal of Operational Research*, 92 :182–192, 1996.

[4] Hugo Gilbert, Mohamed Ouaguenouni, Meltem Öztürk, and Olivier Spanjaard. Robust ordinal regression for subsets comparisons with interactions. *arXiv, 2308.03376*, 2023.