Les graphes bipartis biréguliers $(k, 2)$ sont antimagiques

Grégoire Beaudoire[1], Cédric Bentz[1], Christophe Picouleau[1]

Conservatoire National des Arts et Métiers, CEDRIC laboratory, Paris (France).

gregoire.beaudoire@cnam.fr,cedric.bentz@cnam.fr,christophe.picouleau@cnam.fr

Mots-clés : *antimagie, graphe biparti, subdivision*

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini simple, avec $|V| = m$ et $|E| = n$. Soit $f : E \to \{1, 2, \ldots, m\}$ un étiquetage bijectif des arêtes de G. Pour tout sommet $u \in V$, notons $\sigma(u) = \sum_{v|(u,v)\in E} f(u, v)$. Alors f réalise un étiquetage antimagique de G si $\forall u, v \in V, u \neq v \implies \sigma(u) \neq \sigma(v)$. On dit que G est antimagique s'il existe un étiquetage antimagique sur G (voir Figure 1).

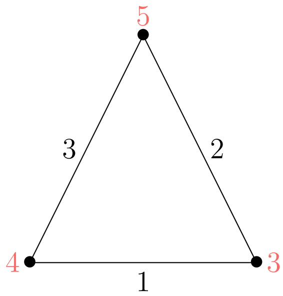

FIG. 1 – Graphe à 3 sommets avec un étiquetage antimagique ; la valeur des $\sigma(u)$ pour chaque sommet u est indiquée à côté des sommets (on remarquera que les trois valeurs sont bien toutes distinctes).

La notion d'étiquetage antimagique a été introduite dès 1990 par Hartsfield et Ringel [2], avec la conjecture centrale suivante :

Conjecture 1 *Les graphes connexes différents de K_2 sont antimagiques.*

De nombreux travaux sur différentes classes de graphes ont donné lieu depuis à différents résultats, notamment ce théorème de Bérczi en 2015 [1] :

Théorème 1 *Les graphes réguliers sont antimagiques.*

Le dernier résultat en date est celui de Yu en 2023 [3] :

Théorème 2 *Soit $G = (X \cup Y, E)$ un graphe biparti. Considérons que $\deg_G(x) = s$ pour tout $x \in X$ et $\deg_G(y) = l$ pour tout $y \in Y$. Alors si $s \geq l + 2$ et si s ou l est impair, G est antimagique.*

Nous prouvons ici que le résultat reste vrai pour les graphes bipartis biréguliers $(k, 2)$, à l'aide d'une décomposition par niveaux et d'une construction explicite permettant d'obtenir des valeurs de $\sigma(u)$ dont la parité dépend du degré de u :

Théorème 3 *Soit $G = (X \cup Y, E)$ un graphe biparti connexe, avec $\deg_G(x) = k$ pour tout $x \in X$ et $\deg_G(y) = 2$ pour tout $y \in Y$. Alors G est antimagique.*

Cela implique notamment que les graphes bipartis biréguliers $(3,2)$ connexes sont antimagiques, ce qui était l'un des principaux cas non couverts dans [3].

Nous en déduisons également le résultat suivant :

Corollaire 1 *Soit G un graphe régulier connexe. Alors le graphe G', obtenu en subdivisant une fois chaque arête de G, est antimagique.*

Références

[1] Kristóf Bérczi, Attila Bernáth and Máté Vizer. Regular graphs are antimagic. Electronic Journal of Combinatorics, 22(3) :3, 2015.

[2] Nora Hartsfield and Gerhard Ringel. Pearls in Graph Theory : A Comprehensive Introduction. Dover Books on Mathematics, 1990.

[3] Xiaowei Yu. Antimagic labeling of biregular bipartite graphs. Discrete Applied Mathematics, 327 :47-59, 2023.