Résolution du problème des p-centres via MaxSAT *

Thomas Bazaille, Laure Brisoux Devendeville, Chu-Min Li, Corinne Lucet
Laboratoire MIS (UR 4290), Université de Picardie Jules Verne, France
{thomas.bazaille, laure.devendeville, chu-min.li, corinne.lucet}@u-picardie.fr

Mots-clés : *p-centres, MaxSAT*

1 Introduction

Le problème des p-centres appartient à la famille des problèmes de localisation dont le but est de placer p centres dans un réseau afin de minimiser la distance maximum entre un client et un centre. Il existe plusieurs applications à ce problème, comme la localisation de casernes de pompiers, de dépôts d'ambulance, de stations de recharges de véhicules électriques etc. Le problème des p-centres est NP-difficile même dans certaines formulations simplifiées où de fortes hypothèses sont faites sur la structure du graphe. Ici, nous proposons une méthode exacte pour résoudre le problème des p-centres en se basant sur un encodage du problème vers un problème MaxSAT (*Maximum Satisfiability*). MaxSAT est le problème de la recherche d'une affectation de variables qui satisfait le nombre maximum de clauses dans un multi-ensemble de clauses donné. Plus précisément, étant donné un ensemble de clauses *soft* et un ensemble de clauses *hard*, MaxSAT consiste à trouver une affectation aux variables qui satisfasse toutes les clauses *hard* et un nombre maximal de clauses *soft*. Dans la littérature, plusieurs types de méthodes exactes ont été proposées, comme : des modèles de programmation en nombres entiers [3, 2] ou des formulations SAT [5]. Dans ces méthodes, le problème d'optimisation des p-centres est décomposé en plusieurs problèmes de décision dans lesquels le rayon est fixé. C'est donc le problème des p-centres décisionnel qui sera encodé en instance MaxSAT, et qui sera résolu à l'aide de plusieurs solveurs MaxSAT.

2 Définition du problème

Soit $G = (N,E)$ un graphe complet non orienté, où N est un ensemble de n sommets $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et E est un ensemble d'arêtes pondérées. La distance d'un plus court chemin entre deux sommets u et v est noté $d(u, v)$. Le problème des p-centres consiste à trouver un ensemble de centres $S \subseteq N$, tel que $|S| = p$ et minimisant la fonction objectif $f = max_{v \in N} min_{u \in S} d(u, v)$. Ce problème est équivalent à résoudre une succession de problèmes de recouvrement d'ensemble (*Set Covering Problem* SCP) comme proposé par Minieka [6], chacun correspondant à trouver un ensemble d'au plus p centres dans le sous-graphe issu de G dans lequel seules les arêtes de longueurs inférieures ou égales à une distance d donnée sont conservées. Si une solution existe pour le SCP pour une distance d, cela assure que le coût optimal pour le problème des p-centres associé est inférieur ou égal à d. Sinon, le coût optimal est supérieur ou égal à $d + 1$.

3 Méthode de résolution

Etant donnée une distance d, le graphe G_d est défini de la manière suivante, G_d est un sous-graphe de G dans lequel une arête entre deux sommets v_i et v_j est définie si le sommet v_j peut *couvrir* le sommet v_i dans un rayon de distance d. Une formulation du SCP pour le graphe G_d

* Ce travail a été financé par l'Agence Nationale de la Recherche, référence ANR-19-CHIA-0013-01

est générée via un encodage en un problème MaxSAT. Cette formulation est alors compatible pour être interprétée par un solveur MaxSAT, et une résolution du SCP peut être fournie.

On définit pour tout i, $x_i = 1$ si v_i est centre et $x_i = 0$ sinon. Et on définit $N_D(i)$ le voisinage de v_i, i.e. tous les sommets de G se trouvant à une distance inférieure à d de v_i.

Afin de coder le SCP à partir de G_d comme un problème MaxSAT, il suffit de vérifier que chaque sommet a au moins un centre dans son voisinage ou qu'il est lui-même centre. La clause C_i utilisée pour vérifier si le sommet v_i est couvert par au moins un centre est définie comme suit : $C_i = \bigvee_{j \in N_d(i)} x_j$. Ainsi, la forme normale conjonctive (FNC) $\Phi = \bigwedge_{i \in N} C_i$ respecte le fait que chaque sommet du graphe soit couvert par au moins un centre. Toutes ces clauses $(C_i)_{i \in N}$, sont appelées clauses *hard* dans le contexte de MaxSAT, car ces clauses doivent être satisfaites pour résoudre le problème SCP. Nous devons également implémenter la limite du nombre de centres afin de trouver une solution au problème contenant au plus p centres. À cette fin, nous déclarons n clauses *soft* $(S_k)_{k \in N}$ comme suit : $S_k = \neg x_k$. Il s'agit de clauses unitaires qui limiteront le nombre de centres, puisque l'objectif de MaxSAT est de maximiser le nombre de clauses *soft* satisfaites. La FNC $\phi = \bigwedge_{k \in N} S_k$ permet de limiter le nombre de centres. Finalement, la FNC $\Phi \wedge \phi$ encode le problème SCP et un solveur MaxSAT peut alors traiter le problème. En effectuant une dichotomie sur la distance d, nous pouvons trouver le coût optimal du problème des p-centres en résolvant un nombre fini de SCP.

4 Résultats

Nous avons testé cette approche sur deux solveurs MaxSAT : MaxCDCL [4], un solveur basé sur un algorithme par séparation et évaluation combinant l'apprentissage de clauses et une procédure de bornage efficace, et EvalMaxSAT [1]. Par ailleurs, pour tester la pertinence et l'efficacité de cette méthode, nous la comparons avec la méthode de résolution exacte se basant sur la programmation linéaire en nombres entiers en utilisant le solveur CPLEX [2]. Enfin nous avons créé une combinaison de ces deux méthodes car certaines instances se trouvent être difficilement résolues avec CPLEX mais plus facilement avec des solveurs MaxSAT, et inversement pour d'autres instances, ce qui permet de résoudre plus d'instances. Les instances de graphe utilisées sont issues de la librairie TSPLIB et les valeurs de p sont choisies entre 5 et 500. Nous limitons le temps de résolution de chaque SCP à 1 h.

Méthode	CPLEX	MaxCDCL	EvalMaxSAT	Combiné
Nb instances résolues (en %)	61	50	59	71

Comme nous pouvons le constater sur le tableau, la méthode combinée permet de gagner 10% d'instances résolues. Les solveurs MaxSAT seuls sont, quant à eux, légèrement moins performants.

Références

[1] Florent Avellaneda. A short description of the solver EvalMaxSAT. *MaxSAT Evaluation 2020.*

[2] H. Calik and B. C. Tansel. Double bound method for solving the p-center location problem. *Computers & Operations Research*, 40(12) :2991–2999, December 2013.

[3] M. S. Daskin. *Network and discrete location : models, algorithms, and applications.* Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization. Wiley, New York Chichester, 1995.

[4] Chu-Min Li, Zhenxing Xu, Jordi Coll, Felip Manyà, Djamal Habet, and Kun He. Combining clause learning and branch and bound for maxsat. *Thirty-First International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI-22*, pages 5299–5303, 7 2022.

[5] X. Liu, Y. Fang, J. Chen, Z. Su, C. Li, and Z. Lu. Effective Approaches to Solve P -Center Problem via Set Covering and SAT. *IEEE Access*, 8 :161232–161244, 2020.

[6] E. Minieka. The m-center problem. *SIAM Review*, pages 138–139, 1970.