Schéma de perturbation-dualité en optimisation combinatoire et algorithmes en convexité généralisée

Rapport de stage de fin d'études
du Master Parisien de Recherche Opérationnelle

réalisé d'avril à septembre 2023

Seta Rakotomandimby[1],
sous la supervision de Michel De Lara[1]

Centre d'Enseignement et de Recherche en Mathématiques et Calcul Scientifique
Ecole des Ponts ParisTech
`{seta.rakotomandimby, michel.delara}@enpc.fr`

Mots-clés : *dualité, programmation linéaire en nombres entiers, convexité généralisée, algorithmes en convexité abstraite, parcimonie*

Première partie : schéma de perturbation-dualité en optimisation combinatoire

Contexte

Jeroslow a établi un résultat de dualité forte pour la programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) entre un PLNE de minimisation et un programme dual de maximisation sur l'espace des fonctions sous-additives [5]. Il a renforcé ce résultat en restreignant cet espace au sous-espace des fonctions de Chvátal [2].

Par ailleurs, Rockafellar a introduit une méthode systématique pour la construction et l'étude de problèmes duaux [7]. Initialement développée dans le cas des problèmes de minimisation convexes, cette méthode a été généralisée au cas de problèmes de minimisation non convexes dans [1]. Les notions de *perturbation* d'un problème de minimisation et de *couplage* c mettant en dualité deux ensembles y prennent une place centrale. On y définit aussi un jeu de fonctions construisant un problème dual à partir d'une perturbation et d'un couplage donnés : la *fonction valeur*, le *Rockafellien* et le *Lagrangien*. On nommera cette méthode le *schéma de perturbation-dualité*.

Objectif

On souhaite retrouver les résultats de dualité forte de Jeroslow pour la PLNE et obtenir de nouveaux résultats en appliquant le schéma de perturbation-dualité à la PLNE.

Résultats

Nous réinterprétons le résultat de dualité forte de Jeroslow sur la PLNE à partir de la perturbation du membre de droite des contraintes et du couplage d'évaluation sur l'espace des fonctions sous-additives. De plus, nous réinterprétons les conditions de complémentarité à l'aide de sous-gradients généralisées.

Perspective

Nous avons mis en évidence un programme dual quasi-affine pour la PLNE qui, à défaut de réaliser la dualité forte, pourrait fournir des sauts de dualité plus faible que la relaxation dite «Lagrangienne» en PLNE.

Deuxième partie : algorithmes en convexité généralisée

Contexte

Des travaux [4, 3] sur la pseudonorme ℓ_0 (qui compte le nombre de composantes non nulles d'un vecteur) ont mis en lumière un couplage ¢, dit couplage (Capra), qui rend la pseudonorme ¢-convexe. Le calcul [6] des ¢-sous-gradients de la pseudonorme ℓ_0 permet d'implémenter des algorithmes d'optimisation globale décrits dans [8, §9] par Rubinov.

Objectif

On souhaite implémenter la méthode des plans coupants généralisés (PCG) adaptée à des problèmes de minimisation Capra-convexes ou se décomposant en problèmes Capra-convexes comme

- la minimisation du rapport de la norme ℓ_1 sur la norme ℓ_2 ;
- la minimisation de la pseudonorme ℓ_0 sur un cône épointé ;
- le calcul du *spark* d'une matrice, utile en *compressed sensing*.

Résultats

La méthode PCG converge pour le cas de ℓ_1/ℓ_2 en dimension moyenne ($d \approx 150$). La minimisation de la pseudonorme ℓ_0 sur un cône épointé nécessite l'ajout d'une recherche locale à PCG pour converger en petite dimension ($d \approx 5$) ; cependant, la méthode peine à converger en dimension plus grande. Pour le calcul du spark d'une matrice, la méthode PCG avec recherche locale converge étonnamment bien et devient meilleure qu'une méthode d'énumération des familles des colonnes de la matrice à partir de la dimension $d \approx 16$.

Perspectives

Il reste à tester d'autres méthodes d'optimisation globale en convexité abstraite de [8, §9] comme le *branch-and-bound* ou la *recherche tabou*. En particulier, une méthode de *branch-and-cut* avec des coupes Capra-convexes semblerait adaptée pour l'optimisation de la pseudonorme ℓ_0 sur un cône épointé.

Références

[1] E. J. Balder. An extension of duality-stability relations to nonconvex optimization problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 15(2) :329–343, 1977.

[2] Charles E Blair and Robert G Jeroslow. The value function of an integer program. *Mathematical programming*, 23(1) :237–273, 1982.

[3] Jean-Philippe Chancelier and Michel De Lara. Hidden convexity in the l_0 pseudonorm. *Journal of Convex Analysis*, 28(1) :203–236, 2021.

[4] Jean-Philippe Chancelier and Michel De Lara. Capra-convexity, convex factorization and variational formulations for the l_0 pseudonorm. *Set-Valued and Variational Analysis*, 30 :597–619, 2022.

[5] Robert G Jeroslow. Minimal inequalities. *Mathematical programming*, 17(1) :1–15, 1979.

[6] Adrien Le Franc, Jean-Philippe Chancelier, and Michel De Lara. The capra-subdifferential of the l_0 pseudonorm. *Optimization*, pages 1–23, 2022. accepted for publication.

[7] R. Tyrrell Rockafellar. *Conjugate Duality and Optimization.* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1974.

[8] Alexander Rubinov. *Abstract convexity and global optimization*, volume 44 of *Nonconvex Optimization and its Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.