

Optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions équitables de problèmes multi-agents

Mohammed Bachir Bederina¹, Djamel Chaabane¹, Thibaut Lust²

¹ Université des sciences et de la technologie Houari-Boumédiène, Faculté de Mathématiques

`{mbederina, dchaabane}@usthb.dz`

² Sorbonne Université, LIP6

`thibaut.lust@lip6.fr`

Mots-clés : *Optimisation combinatoire, aide à la décision, multi-agents, équitabilité*

1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce travail à l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions équitables d'un problème multi-agents. Considérons par exemple un problème d'affectation d'objets à des agents, où chaque agent a des préférences sur les objets. En général, l'objectif est de trouver une solution équitable, c'est-à-dire satisfaisant chacun des agents. Différents critères d'équité ont été considérés dans la littérature pour résoudre ce problème [5]. Néanmoins, il se peut que l'allocation d'un objet à un agent ait un certain coût. Dans ce cas, une solution équitable ne sera pas forcément de coût minimal. L'objectif est donc de trouver une affectation équitable des objets aux agents, tout en minimisant le coût total de l'affectation. Le problème se ramène donc à la minimisation d'une fonction linéaire (la fonction de coût) sous la contrainte d'équité. Ce problème a été largement étudié dans le contexte de la dominance de Pareto, c'est-à-dire que l'on recherche une solution qui optimise une fonction linéaire sous la contrainte que la solution soit Pareto-optimale [1, 2, 6]. Mais à notre connaissance, ce problème n'a jamais été étudié sous la contrainte d'équité.

2 Présentation du problème

Dans un premier temps nous définissons un problème d'optimisation multi-agents combinatoire. Étant donné $\mathcal{X}$ un ensemble admissible, défini par un ensemble de contraintes sur n variables de décisions, une solution $x \in \mathcal{X}$ est évaluée à travers différentes fonctions d'utilité qui associe à une solution x un vecteur $y(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$, où $f_i(x)$ correspond à l'utilité que l'agent i a pour la solution x (un nombre p d'agents est considéré). Un problème d'optimisation multi-agents combinatoire se ramène donc au problème d'optimisation suivant :

$$\underset{x \in \mathcal{X}}{\text{maximize}} \quad (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

Pour comparer les solutions, nous utilisons un raffinement élégant de la dominance de Pareto permettant d'intégrer l'équité : la dominance de Lorenz. La dominance de Lorenz englobe le critère utilitaire et égalitaire, et a été utilisée pour caractériser des solutions équitables en optimisation multi-objectifs [3] et des solutions robustes en décision sous incertitude [4].

Soit $X_L \subseteq \mathcal{X}$ l'ensemble des solutions Lorenz-optimales, et une fonction de coût auxiliaire $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, permettant d'évaluer économiquement une solution x . Le problème étudié est le suivant :

$$\underset{x \in X_L}{\text{minimize}} \varphi(x)$$

La difficulté de ce problème provient du fait que l'ensemble X_L n'est pas caractérisé, que cela soit explicitement par un ensemble de solutions, ou même implicitement par un ensemble de contraintes. De plus, optimiser $\varphi(x)$ sur l'ensemble des solutions admissibles ne donne en général qu'une solution Lorenz dominée.

3 Méthode et résultats

Une première méthode pour résoudre ce problème est d'énumérer l'ensemble X_L des solutions Lorenz-optimales (e.g., avec la méthode développée par *Perny et al* [4]) et de sélectionner parmi X_L une solution optimisant $\varphi(x)$. Néanmoins, l'ensemble des solutions Lorenz-optimales peut être de très grande taille et il est plus intéressant de développer des méthodes ne procédant qu'à une énumération partielle de X_L . Nous avons donc adapté la méthode développée par Jorge [2] dans le cadre de la dominance de Pareto à la dominance de Lorenz. Notre méthode est basée sur un test de dominance et sur l'ajout de contraintes propres à la dominance de Lorenz afin de limiter la taille de l'espace de recherche. Nous avons appliqué la méthode aux problèmes d'affectation et de sac à dos. Les résultats montrent que la méthode permet de considérablement réduire le temps de calcul par rapport à une méthode procédant par énumération complète de X_L .

Références

- [1] M. Abbas and D. Chaabane. Optimizing a linear function over an integer efficient set. *European Journal of Operational Research*, 174(2) :1140–1161, 2006.
- [2] J.M. Jorge. An algorithm for optimizing a linear function over an integer efficient set. *Eur. J. Oper. Res.*, 195 :98–103, 2009.
- [3] M.M. Kostreva and W. Ogryczak. Linear optimization with multiple equitable criteria. *RAIRO Operations Research*, 33 :275–297, 1999.
- [4] P. Perny, O. Spanjaard, and L-X. Storme. A decision-theoretic approach to robust optimization in multivalued graphs. *Annals of Operations Research*, 147(1) :317–341, 2006.
- [5] A. Sen. Utilitarianism and welfarism. *Journal of Philosophy*, 76(9) :463–489, 1979.
- [6] S. Tamby and D. Vanderpooten. Optimizing over the efficient set of a multi-objective discrete optimization problem. In *SEA 2023*, volume 265, pages 9 :1–9 :13, 2023.