Réduction polynomiale pour l'ordonnancement Juste-à-Temps avec une date de fin souhaitée non-restrictive ou contrôlable

Ameur SOUKHAL[1], Nguyen HUYNH TUONG[2]

[1] Université de Tours, Laboratoire d'Informatique Fondamentale et Appliquée de Tours LIFAT ROOT, France(2)
`ameur.soukhal@univ-tours.fr`
[2] Industrial university of Ho Chi Minh city, Vietnam
`htnguyen@iuh.edu.vn`

Mots-clés : *Ordonnancement JàT, Réduction, algorithmes polynomiaux, FPTAS, PTAS.*

1 Introduction

Un des problèmes de juste-à-temps (JàT) classiques est le modèle pour lequel tous les travaux ont une date de fin souhaitée commune $d_i = d$, introduit par Kanet en 1981. Un tel modèle correspond par exemple à un système d'assemblage où les composants d'un produit devraient être prêts en même temps, ou bien lorsqu'il s'agit d'une commande d'un client qui doit être livrée à une date prévue à l'avance.

L'avance d'un travail J_i est mesurée par $E_i = max(0, d - C_i)$ ou son retard est donné par $T_i = max(0, C_i - d)$ avec C_i sa date d'achèvement.

Principalement deux problèmes d'ordonnancement sur une seule machine sont étudiés :

— Problèmes d'ordonnancement JàT avec date de fin souhaitée non-restrictive : lorsque les travaux peuvent être débutés avant la date zéro ou lorsque nous avons $d = \sum_{i=1}^{n} p_i$, avec p_i la durée opératoire du travail J_i. Le problème est noté $1|d_i = d, unres| \sum(\alpha_i E_i + \beta_i T_i)$ où $unres$ indique que d est non restrictive.

— Problème d'ordonnancement avec dates de fin souhaitées contrôlables, noté CON, où d est une variable de décision. Le problème est ainsi noté $1|CON, d_i = d| \sum(\alpha_i E_i + \beta_i T_i + \gamma d)$ où contrairement au cas précédent, d est une variable de décision pour laquelle un coût γ est associé.

Nous examinons aussi le cas symétrique lorsque : $\alpha_i = \beta_i = w_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

2 CON vs UNRES : cas symétrique

Pour le cas symétrique avec une seule date de fin souhaitée commune non-restrictive, le problème d'ordonnancement $1|d_i = d, unres| \sum(w_i E_i + w_i T_i)$ est montré polynomial [3] si la valeur maximale des pénalités est bornée par une fonction en n. Dans le cas général, $1|d_i = d, unres| \sum(w_i E_i + w_i T_i)$ accepte un FPTAS [4].

Par une réduction polynomial, nous avons montré que le problème $1|CON, d_i = d| \sum(w_i E_i + w_i T_i + \gamma d)$ présente les mêmes propriétés, à savoir si w_i est bornée par une fonction en n le problème est polynomial, sinon il accepte un $FPTAS$.

3 Due date commune non restrictive

Considérons le problème d'ordonnancement $1|d_i = d, unres| \sum(\alpha_i E_i + \beta_i T_i)$ connu $\mathcal{NP}$-difficile. Dans cette communication, nous avons montré que ce problème accepte un schéma d'approximation polynomial $PTAS$. L'idée globale de notre démarche est basée sur le fait qu'une solution optimale a une structure 'V-shape' [2]. Ainsi, il suffit de déterminer l'ensemble des travaux en avance pour avoir une solution. Pour cela, deux étapes principales sont nécessaires. La première a pour objectif de simplifier la taille des entrées en utilisant la technique dite "*rounding technic*" [1]. Elle consiste à transformer les pénalités d'avance/retard et les durées opératoires des travaux en des puissances entières de $(1+\varepsilon)$. L'objectif est de réduire la taille de l'instance en prenant une décision pour certains travaux à exécuter en avance et ceux à exécuter en retard. Nous qualifions ces travaux par des travaux *"décidables"* moyennant un coût supplémentaire engendré par de telles décisions. Nous montrons que ce coût est borné par $(1+O(\varepsilon))$.

La deuxième étape consiste à chercher la meilleure affectation des travaux de l'ensemble que nous qualifions "*non-décidables*". Sous l'hypothèse $\alpha_{min} \leq \alpha_i \leq \alpha_{max}, \forall i = 1 \ldots n$ et $\alpha_{max}/\alpha_{min} \leq 2$, nous montrons qu'une énumération totale des sous-ensembles de travaux en avance a une complexité bornée par $2^{O(\log^2_{1+\varepsilon}(1/\varepsilon)/\varepsilon^4)}$. Un programme dynamique pour le $PTAS$ est proposé.

4 Date de fin commune contrôlable : CON

Le schéma de réduction polynomial que nous présenterons et avoir développé nous a permis de généraliser ce résultat au cas de date de fin souhaitée contrôlable et d'en déduire la proposition suivante.

Proposition 1 *Le problème d'ordonnancement* $1|CON, d_i = d| \sum(\alpha_i E_i + \beta_i T_i + \gamma d)$ *accepte un PTAS en* $O_\varepsilon(n^2)$ *sous l'hypothèse* $\alpha_{min} \leq \alpha_i \leq \alpha_{max}, \forall i = 1 \ldots n$ *et* $\alpha_{max}/\alpha_{min} \leq 2$.

5 Synthèse des résultats

Nous présenterons une synthèse de résultats obtenus sur l'étude des problèmes d'ordonnancement JàT avec date de fin souhaitée commune non-restrictive ou contrôlable. Ces résultats sont de deux natures :

— Solutions optimales : nous avons généralisé les résultats connus dans la littérature pour un problème à l'autre, c'est le cas du problème JàT symétrique tel exposé précédemment. Nous avons également étudié un autre cas où les durées opératoires sont identiques, $1|p_i = p, d_i = d, unres| \sum(\alpha_i E_i + \beta_i T_i)$. Nous montrons que ce dernier est polynomial. En s'appuyant sur le schéma de réduction que nous avons proposé, nous déduisons ainsi que le $1|CON, p_i = p, d_i = d| \sum(\alpha_i E_i + \beta_i T_i + \gamma d)$ est polynomial.

— Schémas d'approximation : nous déduisons le FPTAS pour le problème CON symétrique lorsque les pénalités sont quelconques. Pour le problème $1|CON, d_i = d, unres| \sum(\alpha_i E_i + \beta_i T_i)$ nous avons montré sous certaines hypothèses que ce problème accepte un PTAS et donc ce résultat est aussi valide pour la version date de fin souhaitée contrôlable.

Notre étude a montré l'existence d'un lien fort entre ces deux classes de problèmes d'ordonnancement J-à-T : CON et UNRES même si de nature les deux problèmes ne sont pas équivalents.

Références

[1] F. Afrati, A. Bampis, C. Kenyon and I. Milis, *A PTAS for the average weighted completion time problem on unrelated machines.* Journal of Scheduling, vol. 3, pp. 323–332, (2000).

[2] K.R. Baker and G.D. Scudder, *Sequencing with earliness and tardiness penalties : a review*, Operations Research (1990) 38, pages. 22–36.

[3] B. Jurisch, W. Kubiak and J. Jozéfowska, *Algorithms for minclique scheduling problems*, Discrete Applied Mathematics, vol. 72, pp. 115--139, (1997).

[4] M.Y. Kovalyov and W. Kubiak, *A fully polynomial approximation scheme for the weighted earlinesstardiness problem*, Operations Research, vol. 47, pp. 757-761, (1999).