

Une approche bayésienne pour l'élicitation de semi-valeurs à partir de préférences partielles

Mohamed Ouaguenouni² Ariane Ravier¹ Stefano Moretti¹
Paolo Viappiani¹ Sébastien Konieczny³

¹ Université Paris-Dauphine, Université PSL, CNRS, LAMSADE, 75016 Paris, France
`firstname.lastname@lamsade.dauphine.fr`

² Sorbonne Université, CNRS, LIP6, 75005, Paris, France
`firstname.lastname@lip6.fr`

³ Université d'Artois, CNRS, CRIL, Lens, France

Mots-clés : *élicitation, semi-values, modélisation de préférences, préférences additives, interactions, social ranking, bayesian framework*

1 Introduction

Ce travail se place dans le contexte d'un jeu coopératif, caractérisé par un ensemble \mathcal{A} de n agents. On note $\mathcal{C} = 2^{\mathcal{A}}$ l'ensemble des coalitions pouvant être formées par ces agents. Les préférences sur les éléments de \mathcal{C} sont exprimées par une relation d'ordre partielle notée $\succ_{\mathcal{C}}$. On cherche alors à résoudre le problème de *social ranking* [3], consistant à inférer une relation d'ordre $\succ_{\mathcal{A}}$ sur les agents à partir de $\succ_{\mathcal{C}}$. La relation $\succ_{\mathcal{A}}$ témoigne de l'influence de chaque agent, également appelée indice de pouvoir, au sein des coalitions; en d'autres termes, elle révèle la qualité de ses interactions avec les autres agents.

Ce cadre d'étude peut notamment s'appliquer à un jeu coopératif dans lequel n partis politiques sont représentés dans plusieurs chambres d'un parlement multicaméral. On décrit ce problème par une matrice E , où e_i^j représente le nombre de parlementaires affiliés au parti i dans la chambre j . Pour comparer deux coalitions de partis C_1, C_2 , on évalue le nombre de chambres dans lesquelles un projet soutenu par chaque coalition est adopté, *i.e.* $C_1 \succ_{\mathcal{C}} C_2 \Leftrightarrow f(C_1) > f(C_2)$, où $f(C)$ indique le nombre de chambres ayant approuvé le projet d'une coalition C . L'ordre $\succ_{\mathcal{A}}$ témoigne alors de l'influence décisionnelle de chaque parti.

2 Modèle bayésien pour l'élicitation de semi-valeurs

Semi-valeurs et fonctions additives Étant donné un jeu coopératif à utilité transférable décrit par une fonction caractéristique $v : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ associant une utilité à chaque coalition d'agents, et telle que $v(\emptyset) = 0$, une *semi-valeur* $\pi_i^{\mathbf{P}}(v)$ est une fonction attribuant à chaque agent $i \in \mathcal{A}$ la quantité

$$\pi_i^{\mathbf{P}}(v) = \sum_{S \subseteq \mathcal{A} \setminus \{i\}} p_S m_i^S(v), \quad (1)$$

où p_S est la probabilité de formation de la coalition S suivant la distribution \mathbf{p} , et $m_i^S(v) = v(S \cup i) - v(S)$ est la *contribution marginale* de i à $S \cup \{i\}$, pour chaque $i \in \mathcal{A}$ et $S \subseteq \mathcal{A} \setminus \{i\}$.

Ainsi, la semi-valeur $\pi_i^{\mathbf{P}}(v)$ représente la contribution marginale *attendue* d'un agent i à toutes les coalitions auxquelles il appartient au sein du jeu décrit par v , selon la distribution de probabilités de formation de coalitions \mathbf{p} .

Étant donné une valeur $k \in \mathbb{N}$, une fonction caractéristique v est dite *k-additive* [2] si son application à une coalition $S \in \mathcal{C}$ est paramétrée par un vecteur w associant à chaque coalition

$T \subseteq S$ de taille $|T| \leq k$ un poids $w_T \in \mathbb{R}$, de sorte que

$$v_w(S) = \sum_{T \in \mathcal{C}^k} I_S(T) w_T, \quad (2)$$

où $\mathcal{C}^k = \{T \in \mathcal{C} \mid |T| \leq k\}$ est l'ensemble des coalitions de taille inférieure ou égale à k , et $I_S(T)$ est l'indicatrice de S , qui renvoie 1 si $T \subseteq S$, 0 sinon. Une fonction k -additive peut comparer toute paire d'alternatives, et engendre donc une relation d'ordre linéaire complète. Dans la mesure où il existe cependant plusieurs extensions linéaires pour une même relation d'ordre partielle $\succ_{\mathcal{C}}$, nous proposons d'utiliser une méthode bayésienne pour estimer la distribution *a posteriori* $P(w \mid \succ_{\mathcal{C}})$ des vecteurs w étant donné la relation d'ordre partielle $\succ_{\mathcal{C}}$.

Cette distribution nous permet ensuite de dériver un *a posteriori* sur les semi-valeurs des attributs $P(\pi_i^p \mid \succ_{\mathcal{C}})$, à l'aide des équations (1) et (2).

Approximation d'un *a posteriori* sur une fonction caractéristique v À partir du cadre bayésien présenté par [1], on suppose que les préférences du décideur sont régies par une fonction d'utilité θ -additive v_w , affectée par un bruit blanc ϵ de variance σ , soit $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$. La probabilité d'observer $A \succ_{\mathcal{C}} B$ étant donné la fonction v_w est donc

$$P(A \succ_{\mathcal{C}} B \mid w) = \Phi \left(\frac{v_w(A) - v_w(B)}{2\sigma} \right),$$

où Φ est la fonction de répartition cumulative de la distribution normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

On supposera également un *a priori* Gaussien sur les vecteurs w pour favoriser les vecteurs parcimonieux, *i.e* $P(w) \propto \mathcal{N}(0, \sigma_w)$, ce qui nous permet d'obtenir une approximation du logarithme de l'*a posteriori*. Par ailleurs, la semi-valeur d'une fonction caractéristique peut s'exprimer en fonction d'un vecteur w , sous la forme

$$\pi_i^p(v_w) = \sum_{S \in \mathcal{C}^k: i \in S} w_S \sum_{k=0}^{n-s} \binom{n-s}{k} p_{s+k-1}, \quad (3)$$

à partir de quoi on obtient la distribution *a posteriori* d'une semi-valeur en intégrant

$$P(\pi_i^p \mid \succ_{\mathcal{C}}) = \int_w \pi_i^p(v_w) P(w \mid \succ_{\mathcal{C}}) dw. \quad (4)$$

La distribution de chaque semi-valeur suit elle-même une loi normale, et permet donc d'inférer un ordre sur les agents, mais également de déduire un intervalle de confiance sur cet ordre.

Résultats sur données synthétiques L'efficacité de notre méthode est testée sur des données synthétiques, en générant une fonction k -additive pour comparer des coalitions et calculer les semi-valeurs des agents. En appliquant notre modèle à un ordre partiel constitué de comparaisons sur 80% des coalitions dans \mathcal{C} , on constate que la distance de Kemeny moyenne entre l'ordre trouvé et celui issu des semi-valeurs de la fonction initiale tend vers 0.

Remerciements

Ce travail a été réalisé grâce au soutien financier du projet THEMIS ANR-20-CE23-0018 de l'Agence Nationale de la Recherche.

Références

- [1] Wei Chu and Zoubin Ghahramani. Preference learning with Gaussian processes. In *Proceedings of the 22nd International Conference on Machine Learning, ICML 2005, Bonn, Germany*, pages 137–144, 2005.
- [2] Peter C Fishburn. *Utility theory for decision making*. John Wiley and Sons, New York, 1970.
- [3] Stefano Moretti and Meltem Öztürk. Some axiomatic and algorithmic perspectives on the social ranking problem. In *Algorithmic Decision Theory : 5th International Conference, ADT 2017, Luxembourg, Luxembourg, October 25–27, 2017, Proceedings*, page 166–181, Berlin, Heidelberg, 2017. Springer-Verlag.